第１章

株式価値評価と株式ポートフォリオ戦略

この章のポイント

この章では、株式ポートフォリオ戦略について学習します。大半のテーマは１次レベルで学習してきたところかもしれません。しかし、本章の中心テーマを煎じ詰めれば「分散効果」で、「現在価値」と並んでファイナンスの理論の根幹を成しています。これは、株式ポートフォリオに限らず、アセット・アロケーション、国際証券投資、オルタナティブ投資といった分野で幅広く登場するアイデアで非常に重要です。また、例年必ず出題されるパフォーマンス評価（第７章）の基礎となります。

1　２パラメータ・アプローチ　☆☆☆

1　リターンとリスクの指標－期待収益率と分散・標準偏差－

投資家が自己の資産を金融資産で運用するときには、得られるリターンとそれに伴うリスクを考慮して可能な投資対象の中から、自己にとって最も望ましい投資を選択する。すなわち、投資家は可能な投資機会(投資機会集合)の中から自己の効用を最大にする投資を決定する。このため、投資対象を決定するにあたっては、

①　投資家の選好

リターンとリスクの組合せに対して、投資家はいかなる態度で臨むか？

②　投資機会集合

さまざまな銘柄への投資によって、リターンとリスクの組合せとしてどのような選択肢が存在するか？

という２点を考察する必要がある。

これら２つの問題を、リターンとリスクとの関係に着目して考えていく。

そして、ポートフォリオ理論では、

リターンの尺度……期待収益率（収益率の期待値）

リスクの尺度……収益率の分散（または標準偏差）

を用いて分析を進める。このため、**２パラメータ・アプローチ**（2 parameter approach）あるいは**平均・分散アプローチ**（mean−variance approach）とも呼ばれる。

2　投資家の選好

投資家は期待効用を最大にするように行動する。その際、リスクとリターンを評価しながら投資対象を決定する。

一般に、投資家にとって、他の条件が全く同じであれば、リターンが高ければ高いほど望ましい投資対象と考えられるだろう。これに対し、リスクについての評価は投資家によってかなり異なる。経済学では、経済主体をリスクに対する態度によって、

①　**危険中立的**（risk neutral）
②　**危険回避的**（risk averse）
③　**危険愛好的**（risk loving）

の 3 つのタイプに分類する。

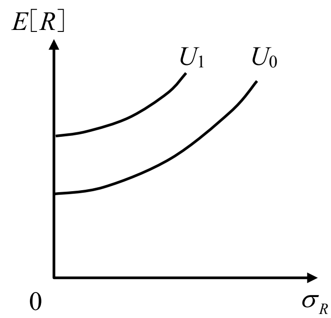
ポートフォリオ理論がその対象とするのは、**危険回避的な投資家**である。

危険回避的な投資家は、次のような性格を持つ。

・リスクの程度が同じであればリターンがより高い方を選択する。
・リターンが同じであればリスクの小さい方を選択する。

ここで、リターンの尺度として期待収益率（収益率 R の期待値）$E[R]$、リスクの尺度として収益率の標準偏差 σ_R を用いることにすれば、危険回避的な投資家の選好は次のような右上がりの無差別曲線として描ける。

《危険回避的な投資家の無差別曲線》

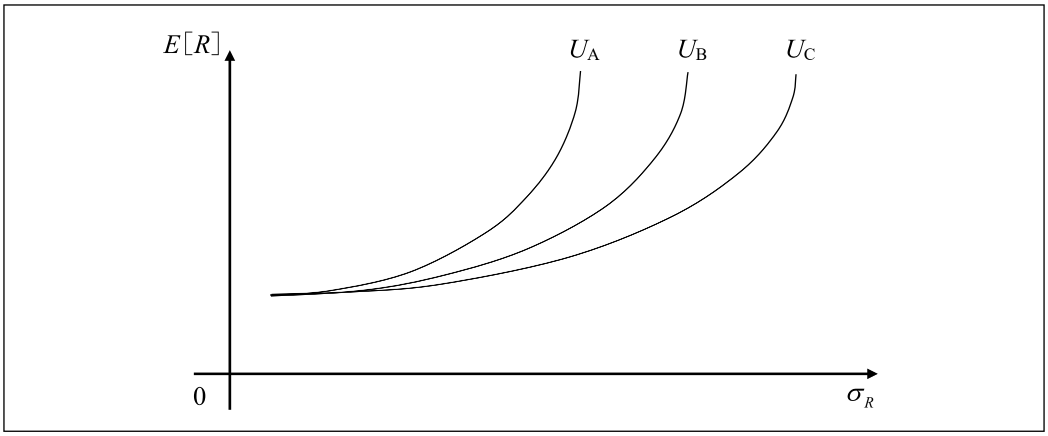


ここでの無差別曲線は、効用が等しくなるリターンとリスクの軌跡である。危険回避的な投資家の場合、リスクが大きいほど効用は下がるから、同一の効用を維持するためにはそれを補うだけのリターンの向上が必要になる。このため、危険回避的な投資家の無差別曲線は右上がりの曲線として描ける。

なお、危険回避的な投資家といっても、投資家の無差別曲線の形状は、投資家ごとに異なる。リスク許容度の大きい投資家に比べ、リスク許容度の小さい投資家の方が、リ

スクが大きくなったとき、同一の効用を維持するために必要となるリターンの上昇幅はより大きくならなければならないので、無差別曲線の傾きはより大きくなる。

《リスク許容度と無差別曲線》



上のグラフで、3 人の危険回避的投資家（A，B，C）について考えると、リスクが高くなるにつれ、より高いリターンを要求しているのは投資家 A である。これに対してリスクが高くなっても要求するリターンの上昇が最も緩やかなのは投資家 C である。これは、リスク許容度によって各投資家の選好が異なるためであり、それぞれのリスク許容度は A，B，C の順にしたがって、次第に大きくなる。

なお、投資家の効用水準については、効用関数として以下のように一般化されることが多い。

$$U_i = \mu_P - \frac{1}{2}\lambda_i \sigma_P^2$$
$$= \mu_P - \frac{1}{2\tau_i}\sigma_P^2$$

U_i：第 i 番目の投資家の効用（i＝A，B，C，…）

μ_P：ポートフォリオの期待収益率

σ_P：ポートフォリオの収益率の標準偏差

λ_i：第 i 番目の投資家のリスク回避度（逆数の τ_i はリスク許容度）

危険回避的な投資家の場合 $\tau_i > 0$ であり、各投資家 i の選好はこの定数によって決まる。上のグラフの場合、$\tau_A < \tau_B < \tau_C$ となっており、リスク許容度の大きい投資家ほど τ_i は大きくなるため、この定数はリスク許容度を表す数値となっている。

3 投資機会集合

本論に入る前に、投資の基礎概念をもう一度整理しておこう。

1. リターン

① 投資収益率　$r = \dfrac{\text{収益}}{\text{投資額}}$

② 期待収益率　$E[R] = \sum_{i=1}^{n} P_i r_i$

$$\begin{cases} P_i\text{：第}\ i\ \text{番目の状態の生起確率} \quad \sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \\ R\text{：収益率（第}\ i\ \text{番目の状態における実現値が}\ r_i\text{）} \end{cases}$$

2. リスク

① 分散　$Var(R) = E[(R - E[R])^2] = \sum_{i=1}^{n} P_i (r_i - E[R])^2$

② 標準偏差　$\sigma_R = \sqrt{Var(R)}$

3. 共分散（$\boldsymbol{Cov(R_X, R_Y)}$ あるいは σ_{XY}）

$$Cov(R_X, R_Y) = E[(R_X - E[R_X])(R_Y - E[R_Y])]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_i (r_{X,i} - E[R_X])(r_{Y,i} - E[R_Y])$$

4. 相関係数（ρ_{XY}）

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(R_X, R_Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (-1 \leqq \rho \leqq 1)$$

$$\longrightarrow \quad Cov(R_X, R_Y) = \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y$$

(1) ポートフォリオの収益率

n 銘柄の証券に投資する場合を考える。各証券への投資比率をそれぞれ w_1, w_2, …, w_n とし、各証券の投資収益率をそれぞれ R_1, R_2, …, R_n とする。このとき、ポートフォリオの収益率 R_P は、次式のように投資比率をウェイトとした個別銘柄の収益率の加重平均となる。

ポートフォリオの収益率

$$R_P = w_1R_1 + w_2R_2 + \cdots + w_nR_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_iR_i$$

＝（各証券への投資比率×各証券の収益率）の合計

ただし、$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

(2) ポートフォリオの期待収益率

n 銘柄の証券に投資する場合の期待収益率（収益率の期待値）は、次式のように投資比率をウェイトした個別銘柄の期待収益率の加重平均として表せる。

ポートフォリオの期待収益率

$$E(R_P) = w_1E(R_1) + w_2E(R_2) + \cdots + w_nE(R_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_iE(R_i)$$

＝（各証券への投資比率×期待収益率）の合計

(3) ポートフォリオの収益率の分散、標準偏差

ポートフォリオの収益率の分散は、投資比率や個別銘柄の収益率の分散（あるいは標準偏差）のほかに各銘柄間の共分散（あるいは相関係数）の影響を受ける。つまり、各銘柄の投資収益率の変動が互いにどのような関係にあるかが、ポートフォリオの収益率の変動を考えるときに重要な役割を果たす。

(a) 2 銘柄のケース

ポートフォリオの収益率の分散（2 銘柄のケース）

$$Var(R_P) = w_1^2Var(R_1) + w_2^2Var(R_2) + 2w_1w_2Cov(R_1, R_2) \quad (1.1.1)$$

あるいは、

$$\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \quad (1.1.2)$$

ただし、$w_1 + w_2 = 1$

1.　（1.1.1）式で、分散を標準偏差で、共分散を相関係数を用いて $Cov(R_1, R_2) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$ と表せば、（1.1.2）式が得られる。
2.　ポートフォリオの期待収益率が各証券の期待収益率の単純な加重平均で示されたのに対し、ポートフォリオの収益率の分散は各証券の収益率の分散の単純な加重平均にはならず、銘柄間の共分散（あるいは相関係数）の影響を受ける。組み入れ証券の間の相関係数が 1 より小さければ、ポートフォリオのリスクは各構成証券のリスク加重平均値未満に抑えることができる。これを**ポートフォリオのリスク分散効果**という。

(b) 3 銘柄のケース

3 証券に投資する場合については、次式のように表される。

ポートフォリオの収益率の分散（3 銘柄のケース）

$$
\begin{aligned}
Var(R_P) &= w_1^2 Var(R_1) + w_2^2 Var(R_2) + w_3^2 Var(R_3) \\
&\quad + 2w_1w_2 Cov(R_1, R_2) + 2w_1w_3 Cov(R_1, R_3) \\
&\quad + 2w_2w_3 Cov(R_2, R_3) \\
&= \sum_{i=1}^{3} w_i^2 Var(R_i) + 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{3} w_i w_j Cov(R_i, R_j)
\end{aligned}
$$

これを標準偏差をベースにして表せば、

$$
\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2w_1w_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \\
&\quad + 2w_2w_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\
&= \sum_{i=1}^{3} w_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{3} w_i w_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j
\end{aligned}
$$

ただし、$w_1 + w_2 + w_3 = 1$

ポートフォリオの収益率の分散（*n* 銘柄のケース）

$$
Var(R_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} w_i w_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \quad \cdots\cdots①
$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{n} w_i w_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \quad \cdots\cdots②
$$

上の 3 銘柄のケースでは②式を使っているが、計算結果はいずれを使っても同じである。

(4) ポートフォリオの期待収益率（リターン）と収益率の標準偏差（リスク）の関係 －投資機会集合－

投資家が選択可能な投資対象全体を**投資機会集合**という。

(a) 2 銘柄のケース

2 銘柄からポートフォリオを構成するとき、縦軸にリターンをとり、横軸にリスクをとったグラフ上で、投資機会集合は相関係数の値によって、曲線または直線として描ける。

相関係数と投資機会集合（危険資産 2 銘柄のケース）

① 正の完全相関（相関係数 ρ_{AB} ＝1）のケース：

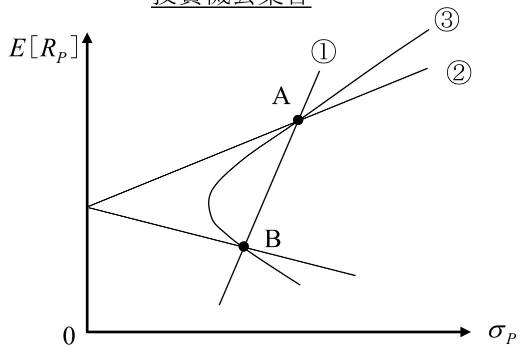
2 銘柄 A，B を表す点を結んだ直線

② 負の完全相関（相関係数 ρ_{AB} ＝－1）のケース：

2 銘柄 A，B を表す点を通る折れ線

標準偏差を 0 にもできる。

投資機会集合



1. 一般のケース（$-1<\rho_{AB}<1$）においては、投資機会集合は A，B を通る曲線で表される。…③
2. 正の完全相関（相関係数が ρ_{AB} ＝1）のケースにおいては、ポートフォリオの期待収益率および収益率の標準偏差は

期待収益率：$E(R_P) = w_A E(R_A) + w_B E(R_B)$

標 準 偏 差：$\sigma_P{}^2 = w_A{}^2\sigma_A{}^2 + w_B{}^2\sigma_B{}^2 + 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B$　　（∵ ρ_{AB} ＝1）

$\therefore \sigma_P = w_A\sigma_A + w_B\sigma_B$

と表される。ここで、保有比率に関して

$w_A + w_B = 1$

であるので、以上 3 式から w_A、w_B を消去すれば、

$$\sigma_P = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{E(R_A) - E(R_B)}\left(E(R_P) - E(R_B)\right) + \sigma_B$$

となり①のように 2 銘柄 A，B を表わす点を結んだ直線となる。すなわち投資機会集合は 2 点 A，B を通る直線で表される。

3. 負の完全相関（相関係数が $\rho_{AB}=-1$）のケースにおいては、ポートフォリオの収益率の標準偏差は

$$\sigma_P=\left|w_A\sigma_A-w_B\sigma_B\right|$$

と表されるから、w_A，w_B を消去すれば、

$$\sigma_P=\left|\frac{\sigma_A+\sigma_B}{E(R_A)-E(R_B)}(E(R_P)-E(R_B))-\sigma_B\right|$$

となり、②のように 2 銘柄 A，B を通る折れ線となる。また、保有比率が、

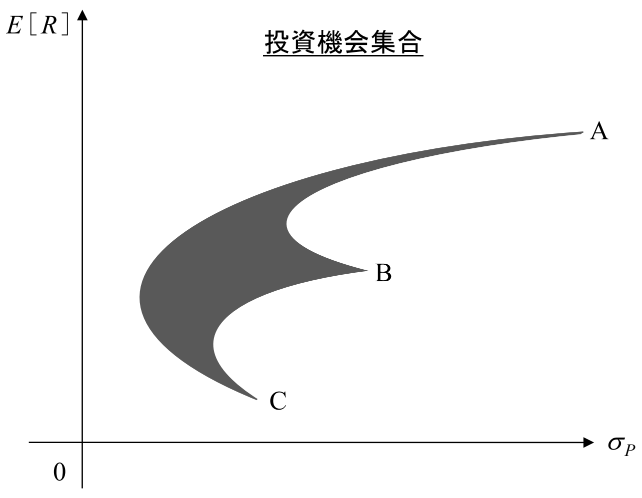
$$w_A=\frac{\sigma_B}{\sigma_A+\sigma_B}$$

のとき、ポートフォリオの標準偏差は 0 になる。

4. 2 銘柄を正に保有比率で持つ（つまり AB 間で表される）とき、相関係数が小さくなればなるほど、同じ期待収益率を表す点は左側に位置することになる。これは相関係数が小さいほどポートフォリオのリスク分散効果が大きいことを示している。

(b) 一般のケース

3 銘柄以上からなるケースの投資機会集合は、安全資産が存在せず、かつ、どの 2 銘柄間をとっても相関係数が 1 でも−1 でもなければ、次の図のように曲線とその右側として表せる。



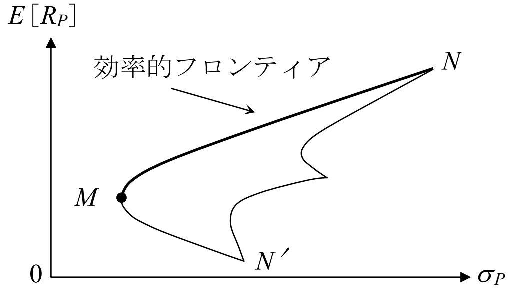
4　効率的フロンティア

1．で述べたように、投資家のポートフォリオ選択は、「投資機会集合から効用を最大にする投資案を選択する」問題として定式化される。

しかし危険回避的な投資家を前提とすれば、投資機会集合全体を考える必要はなく、上の問題は「効率的フロンティアの中から、効用を最大にする投資案を選択する」問題に限定して考えることができる。

効率的フロンティア（efficient frontier）とは、危険回避的な投資家にとって選択対象となりうるポートフォリオの集合をいい、効率的フロンティア上のポートフォリオを**効率的ポートフォリオ**（efficient portfolio）」という。

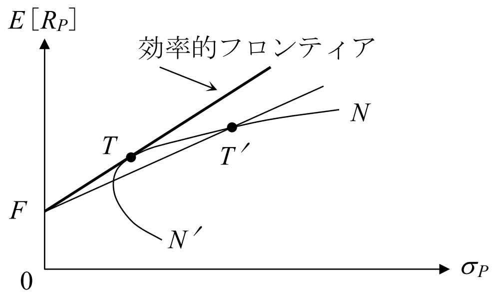
(1)　危険資産のみからなるケース



3 銘柄以上からなるケースの投資機会集合は、安全資産が存在せず、かつ、どの 2 銘柄間をとっても相関係数が $-1 < \rho < 1$ であれば、右図のような曲線 NMN' とその右側として表せる。

ところで、危険回避的な投資家は、リターンが同じであればリスクの最も小さい投資案を望ましいと考えるから、曲線 NMN' の右側の部分は選択対象とはなりえず、最も左側の部分である曲線 NMN'（最小分散境界）のみに着目すればよい。また、リスクが同じであればリターンの最も大きい投資案を望ましいと考えるから、曲線のうち上半分（傾きが正の部分）の NM のみが選択対象となりうることになる。したがって、危険資産のみからなるケースの効率的フロンティアは、最小分散ポートフォリオ M よりも右上に位置する NM ということになる。

(2)　安全資産を含むケース



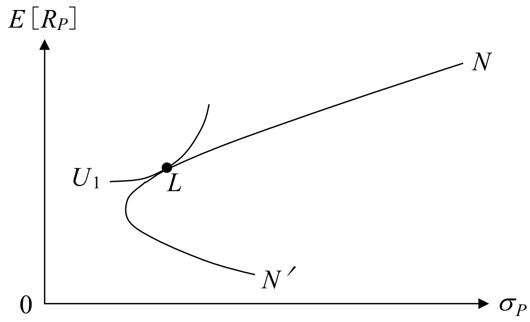
安全資産と危険資産からなるポートフォリオの場合、投資機会集合は安全資産と危険資産を示す点を結ぶ直線として表せる。いま、安全資産 F が存在するときの効率的フロンティアは安全資産を表す点 F から曲線にひいた接線である直線 FT になる（このとき、T を**接点ポートフォリオ**という）。なぜなら、接点以外の点（たとえば T'）をとると、直線 FT' よりも左上に実行可能なポートフォリオが存在することになるため、危険回避的な投資家にとって直線 FT' は効率的フロンティアとはなりえないからである。

5 最適ポートフォリオ

投資家のポートフォリオ選択は、「効率的フロンティアの中から、効用を最大にする投資案を選択する」ものと定式化できた。この効率的フロンティアの中で効用を最大にする投資案（ポートフォリオ）を**最適ポートフォリオ**（optimal portfolio）という。

(1) 危険資産のみからなるケース

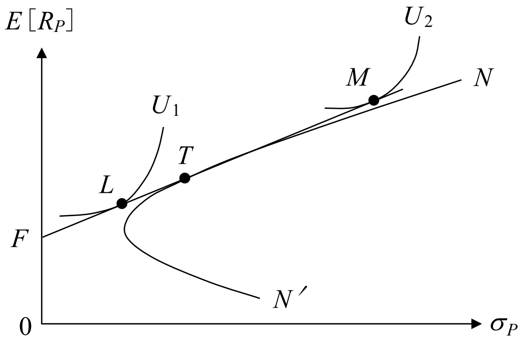
最適ポートフォリオは、効率的フロンティア上で投資家の無差別曲線と接する点で表される。したがって、無差別曲線が U_1 で表される投資家の場合は L が最適ポートフォリオとなる。



(2) 安全資産を含むケース

安全資産と危険資産からなるポートフォリオの場合、効率的フロンティアは安全資産と危険資産の表す点を結ぶ直線として表される。

したがって、無差別曲線が U_1 で表される投資家の場合は L、U_2 で表される投資家の場合は M が最適ポートフォリオとなる。



なお、L では、安全資産（F）と危険資産である接点ポートフォリオ（T）を正の比率で保有しているが、M では、安全資産を負の比率で保有し（したがって、借り入れを行い）接点ポートフォリオに投資することになる。そのため、FT 上のポートフォリオを**貸付ポートフォリオ**、TM 上のポートフォリオを**借入ポートフォリオ**と呼ぶこともある。

以上から、実は、投資家の選好がいかなるものであろうと安全資産（F）と接点ポートフォリオ（T）が選択されることになる。つまり、リスク資産の最適な組合せ（T）の決定は、安全資産を含む最適ポートフォリオの決定の問題とは分離可能である。これを**分離定理**（separation theorem）という。

２　資本資産評価モデル(CAPM)　☆☆☆

1　資本資産評価モデル（CAPM）

資本資産評価モデル（Capital Asset Pricing Model、CAPM）とは、市場に参加するすべての投資家が、マーコヴィッツ（H.Markowitz）によって展開された2パラメータ・アプローチにしたがって行動したとき、証券価格はどのように形成されているかについて考察した理論である。

シャープ（W.Sharpe）とリントナー（J.Lintoner）によって独立に導かれた資本資産評価モデルは、次のような仮定のもとで成立する。

Ⅰ．資本市場に関する仮定

（仮定 1）摩擦のない市場（frictionless market）

売買委託手数料や取引税などの取引コストや情報コストはかからない。

（仮定 2）分割可能性

証券は完全に分割可能である。すなわち、単元株制度などの取引単位の制約を受けず、すべての証券をいくらでも小さい単位で売買できる。

（仮定 3）市場参加者がきわめて多数

投資家は価格に関してはプライステイカーであり、個々の投資家の行動は市場価格に影響を及ぼさない。

Ⅱ．危険資産に関する仮定

（仮定 4）空売りが自由

すべての危険資産の空売りは無制限にできる。

（仮定 5）資産の収益率の確率分布

資産の収益率は正規分布にしたがう。*1

Ⅲ．安全資産に関する仮定

（仮定 6）無リスク利子率

投資リスクを伴わない資産、すなわち安全資産が存在し、どの投資家もこの無リスク利子率（安全資産利子率）で、無制限に貸借を行うことができる。

Ⅳ．投資家に関する仮定

（仮定 7）投資家の選好に関する仮定

すべての投資家は危険回避的に行動し、投資家は 1 期間後の富のもたらす期待効用が最大になるように資産選択を行う。

（仮定 8）同質的期待の仮定

投資家は証券の収益率に関して同一の予想をもつ。

（仮定 9）投資家の効用関数

投資家の効用関数が 2 次関数で表される。*2

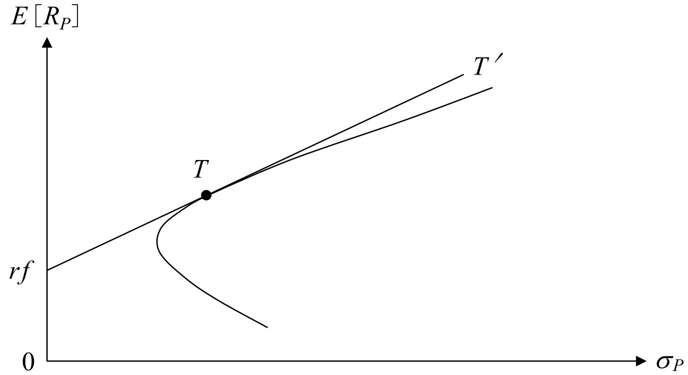
＊1、＊2 の仮定は必然的なものではなく、これらのいずれかが成立すればよい。

これらの仮定は現実とは必ずしも合っているわけではないが、各条件は相当程度緩和することはできる。

2　資本市場線

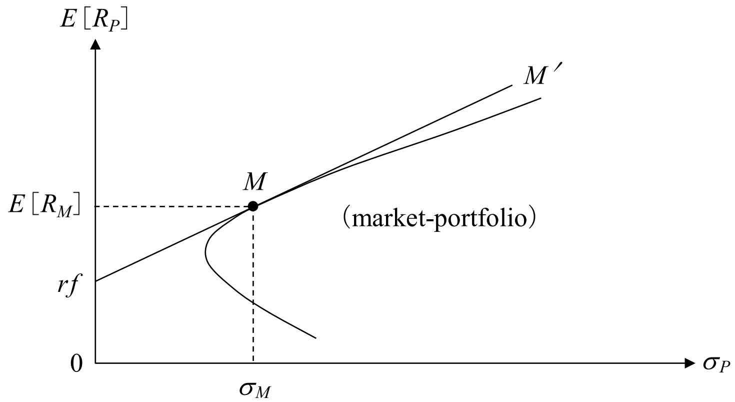
上記のような仮定のもとでは、効率的フロンティアは次図のような、無リスク利子率 rf と接点ポートフォリオ T を結んだ直線 $rfTT'$ になる。

投資機会集合



（仮定 8）のもとでは、直線 $rfTT'$ はすべての投資家に共通の効率的フロンティアとなる。したがって、すべての投資家はリスク証券のポートフォリオとしては接点ポートフォリオ T のみを保有することになる。

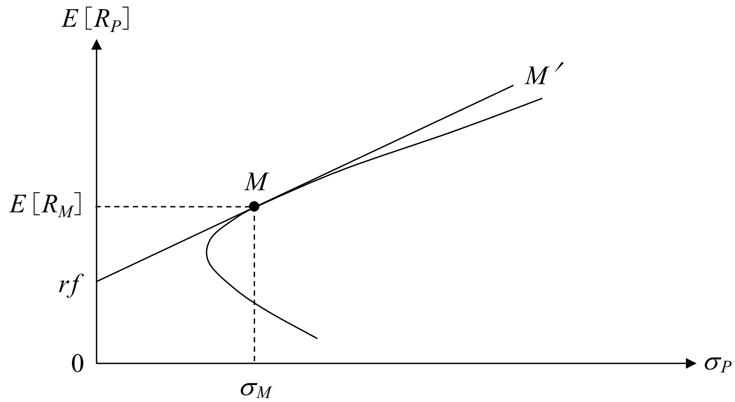
以上は、各証券の現在の価値水準や 1 期間の収益率の予想を所与として、各投資家の主体的均衡を考えたものだが、証券の需給が均衡するような価格水準においては、すべての投資家が次ページの図の直線 $rfMM'$ 上でポートフォリオを保有することになる。



ここで、危険資産の最適組合せは接点ポートフォリオである M であるが、すべての証券について需要と供給が等しい均衡状態においては、M は**市場ポートフォリオ**（market−portfolio）と呼ばれる。市場ポートフォリオとは、市場に存在するすべての危険資産をその時価総額の比率で含んだポートフォリオである。

ここで市場ポートフォリオの期待収益率を $E[R_M]$、標準偏差を σ_M とすると、効率的ポートフォリオ P のリスクとリターンの関係は次の図の直線 $rfMM'$ で表される。この直線を**資本市場線**（capital market line, CML）という。

資本市場線（CML）



$$E(R_P)=rf+\frac{E(R_M)-rf}{\sigma_M}\sigma_P \qquad (1.2.1)$$

1. 均衡における効率的ポートフォリオの期待収益率は、（投資収益率の標準偏差で測定した）リスクの正の1次関数であることを示している。したがって、リスクが大きくなればなるほど期待収益率は大きくなる関係が示されている。
2. 資本市場線（CML）の傾き $\frac{E(R_M)-rf}{\sigma_M}$ は、投資リスクを1単位減らすにはどれだけのリターンを犠牲にしなければならないかを表す数値であり、**リスクの市場価格**（market price of risk、MPR）と呼ばれる。
3. 資本市場線（CML）の切片である rf は安全資産の需要を均衡させる利子率で、**時間の市場価格**（market price of time, MPT）と呼ばれる。

3　CAPMと証券市場線

資本市場線（CML）では効率的ポートフォリオにおけるリターンとリスクの関係が期待収益率と標準偏差によって表されていたが、効率的フロンティア上にないポートフォリオや個別証券についてはこの関係は成立しない。そこで、次のステップとして、各証券（またはポートフォリオ）についてリターンとリスクとの関係はどのように表せるかを考える。

ところで、資本市場線（CML）を表す（1.2.1）式からポートフォリオのリスク・プレミアム（$E(R_P)-rf$）は、

$$E(R_P)-rf=\frac{E(R_M)-rf}{\sigma_M}\times\sigma_P$$

＝リスク 1 単位当たりの市場価格×ポートフォリオのリスク（標準偏差）

と表せる。

ポートフォリオを構成する各個別証券は、当該証券をポートフォリオに組み入れたことによってポートフォリオのリスクの増減に貢献しているわけだから、均衡における各証券のリスク・プレミアムを考える際には、各証券がポートフォリオのリスクの増減にどれだけ寄与しているか、すなわち、ポートフォリオのリスクに対する**限界的寄与**を考慮する必要がある。そして、各証券のリスク・プレミアムは、リスクの市場価格とポートフォリオのリスクに対する限界的寄与との積として表すことができると考えられる。

個別の証券 i のポートフォリオのリスクに対する限界的寄与は、

$$\frac{Cov(R_i,\ R_M)}{\sigma_M}$$

であることが知られている。

第 i 証券のリスク・プレミアム（$E(R_i)-rf$）は、前述のように、リスク 1 単位当たりの市場価格×ポートフォリオのリスクに対する限界的寄与に等しくなると考えられるから、

$$E(R_i)-rf=\frac{E(R_M)-rf}{\sigma_M}\times\frac{Cov(R_i,\ R_M)}{\sigma_M}$$

と表せる。この式は**資本資産評価モデル（CAPM）**と呼ばれ、特に Sharpe＝Lintner 型の CAPM と呼ばれる。さらに、CAPM において、

$$\beta_i=\frac{Cov(R_i,\ R_M)}{{\sigma_M}^2}$$

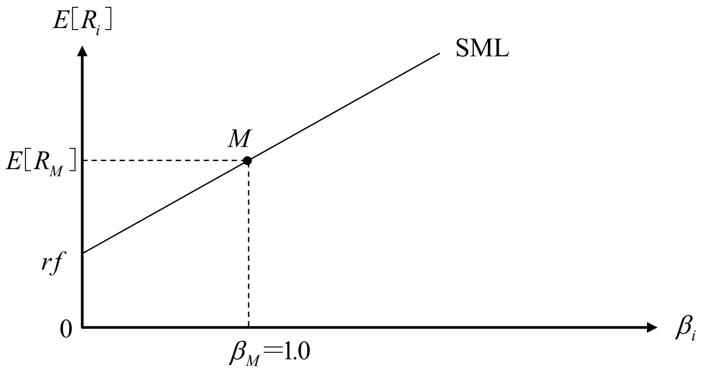
と定義すれば次式のように表すこともでき、これにより各証券についてリターンとリスクの関係を示す**証券市場線**（security market line, SML）が得られる。

証券市場線（SML）

$$E(R_i) = rf + [E(R_M) - rf]\,\beta_i \qquad (1.2.2)$$

ただし、$\beta_i = \dfrac{Cov(R_i,\ R_M)}{\sigma_M{}^2}$

証券市場線（SML）



図のように、市場ポートフォリオのベータ（β_M）は、ベータの定義から、

$$\beta_M = \frac{Cov(R_M,\ R_M)}{\sigma_M{}^2} = \frac{\sigma_M{}^2}{\sigma_M{}^2} = 1.0$$

となり、必ず 1.0 である。

証券市場線から、各証券の期待収益率は均衡において（β で測定した）リスクの正の 1 次関数であることが示される。すなわち、負担するベータ・リスクが大きいほど、証券の期待収益率は大きくなければならないことを意味する。また、個々の証券は均衡状態においてはすべて、証券市場線（SML）上に位置するように価格形成されなければならないことを意味する。

4　CAPMの実証

CAPM については広く実証研究が行われてきた。さまざまな問題が絡み合い、複雑な様相を呈しているが、ここでは基本的な問題について取り上げる。

(1) CAPMの実証の前提条件

CAPM は事前のモデルである。つまり、投資家はこれから投資を行おうとする段階で投資収益等を予想するわけだが、その予想の世界で成立しているリターンとリスクとの関係を捉えたものが CAPM である。このような CAPM の実証を行うために事後的な数値を用いるには、次のような仮定が成立している必要がある。

資産の収益率は正規分布に従い、将来も分布は安定的である。

(2) CAPMの実証の対象

時点 t における証券 i の実現収益率 $R_{i,t}$ が、次のように描写されるとする。（R_i， R_M）

$$R_{i,t} = rf_t + \beta_i (R_{M,t} - rf_t) + e_{i,t} \qquad (1.2.3)$$

ただし、撹乱項は $E(e_{i,t})=0$ として、（1.2.3）式の期待値をとれば CAPM（1.2.2）が成立する。

推定の際には、（1.2.3）式を

$$R_{i,t} - rf_t = \beta_i (R_{M,t} - rf_t) + e_{i,t}$$

という、超過収益率の形に書き換え、これから、回帰モデル

$$R_{i,t} - rf_t = \alpha_i + \beta_i (R_{M,t} - rf_t) + e_{i,t} \qquad (1.2.4)$$

を仮定して、推定誤差を小さくするために複数銘柄から成るポートフォリオを作り、ポートフォリオのベータ（β_P）、及び、定数項 α_i を推測する。

つまり、回帰直線

$$R_{p,t} - rf_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} (R_{M,t} - rf_t)$$

が推定されることになる。

(3) CAPMからの予測

CAPM が成立するとすれば、

①　ポートフォリオ間の超過収益率の差は主として β_P の差によって説明でき、この式に他の変数を付け加えても有意な説明力をもたない

②　切片 α の推定値はゼロから有意に乖離しない

(4) 実証結果

これまでアメリカを中心として行われてきた実証研究において明らかにされた結論は、必ずしもCAPMの成立とは整合的なものではない。すなわち、

① ベータは他のリスク尺度（たとえば分散）より説明力をもっているものの、ベータの他に株価収益率（PER）、株価純資産倍率（PBR）、配当利回り、あるいは企業規模などの変数を加えると回帰のあてはまりは向上する。

② 切片αの推定値は正である

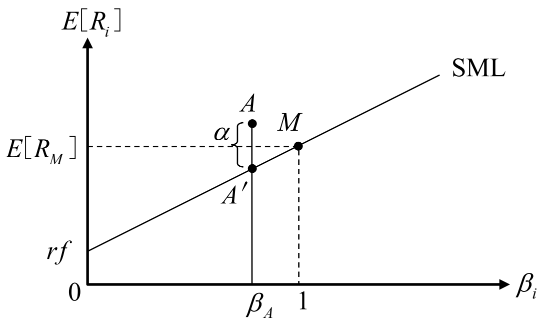
という結果が得られている。

5　CAPMの投資への利用

各証券がCAPMに従って価格形成されているとすれば、すべての個別証券（またはポートフォリオ）は証券市場線（SML）上に位置していなければならない。このことは逆に、もし証券市場線上に位置しない証券があれば、一時的に誤った価格形成がされていることを意味する。したがって、証券市場線（SML）はこうした証券の発見の基準となる。

(a) 証券のアルファ値

証券市場線（SML）が右図のように描け、証券Aの期待収益率と標準偏差が証券市場線からはずれて点Aで描けるものとする。このとき、点 A′は証券 A のベータ・リスク（β_A）に対応する証券市場線（SML）上の点であり、点 A′の高さは、β_A に対する均衡期待収益率である。このとき、CAPM を前提とすると証券 A は一時的に誤って価格づけされていることになる。図のように市場線（SML）より上に位置づけられるときには、期待収益率が均衡期待収益率を上回っているわけだから、現在の水準は均衡価格水準に比べて安くなっている。すなわち証券Aの価格は過小評価されており、「買い」の対象と考えられる。もし図とは逆に証券市場線（SML）より下に位置づけされるときには、当該証券の価格は過大評価されていることになり、「売り」の対象と考えられる。このように、誤って価格づけされているかどうかは証券市場線との位置関係によって判定され、期待収益率と均衡期待収益率との差である**アルファ値**がその判定指標となる。



証券のアルファ値と投資方針

アルファ（α）値＝期待収益率－均衡期待収益率

$\alpha>0$ ⇨ 過小評価　→　「買い」

$\alpha<0$ ⇨ 過大評価　→　「売り」

（b）証券特性線

CAPMを前提とするとき、アルファ値は回帰分析を用いて求めることができる。

先に（1.2.4）で取り上げた回帰モデル

$$R_{i,t} - rf_t = \alpha_i + \beta_i (R_{M,t} - rf_t) + e_{i,t} \qquad (1.2.4\text{ 再掲})$$

を用いて、回帰係数（α_i，β_i）を推定すれば、

第 i 証券の収益率は

$$R_i - rf = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i (R_M - rf) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

という式で表せる。これを**証券特性線**という。

ところで、M が市場ポートフォリオを表すものとし、CAPMが成立しているとすれば、（1.2.2）式から、

$$E(R_i) - rf = \beta_i [E(R_M) - rf] \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

が成立するはずだから、$\hat{\alpha}_i = 0$ でなければならない。

したがって $\hat{\alpha}_i \neq 0$ であれば、CAPMから判断すれば、誤って価格づけされているという結論が導かれる。

なお、ここで取り上げている定数項の推定値 $\hat{\alpha}_i$ は、実は、パフォーマンス評価測度としてのジェンセンのアルファである。

（c）歴史的ベータと将来ベータ

過去の投資収益率のデータから回帰分析により求めたベータは**歴史的ベータ**（historical beta）といわれるが、CAPMは投資をする段階でのリスクとリターンとの関係を示すものである。この意味で事前のモデルであり、投資決定に必要となるのは予定投資期間に係る**将来ベータ**（future beta）である。このため、歴史的ベータによって投資決定を行うには、安定性に関する考慮が必要となる。

3　マーケット・モデル　☆☆

1　マーケット・モデル

マーケット・モデル（市場モデル）は、市場収益率を用いて各証券の収益率を表そうとする**単一指標モデル**（シングルファクター・モデル）である。

マーケット・モデル

$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i$　($i=1, 2, \cdots, n$)　(1)

$e_i \sim N(0, \sigma^2{}_{ei})$　(2)

$Cov(e_i, R_M)=0$　(3)

$\mathrm{Cov}(e_i, e_j)=0 (i \neq j)$　(4)

ただし、R_M　：市場収益率、
R_i　：第 i 証券の収益率（$i=1, 2, \cdots, n$）
e_i　：第 i 証券に固有の撹乱項（$i=1, 2, \cdots, n$）
α_i, β_i　：定数

(1)から分かるように、マーケット・モデルは、各証券の収益率を市場収益率という単一指標によって説明するモデルであり、より具体的には、第 i 証券の収益率は市場収益率 R_M に連動する部分とその証券固有の部分とに分けて説明できると考えるモデルである。

また、(2)～(4)は、マーケット・モデルにおかれる仮定で、

(2) 各証券に固有の撹乱項は期待値 0 で分散が $\sigma_{ei}{}^2$ （一定）の正規分布に従う。

(3) 各証券固有の撹乱項は市場収益率と無相関である。

(4) 異なる証券の撹乱項は互いに無相関である。

ということを意味する。

これにより、各証券間の収益率の連動性が市場収益率との連動性のみによって説明されることになる。

2 各証券の期待収益率、分散および各証券間の共分散

マーケット・モデルが成立する場合の各証券の期待収益率、分散および各証券間の共分散は次のように表せる。

第 *i* 証券の期待収益率

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_M) \tag{5}$$

1. (5)式は以下のように導出される。
   (1)式の両辺の期待値をとり、(2)式より $E(e_i) = 0$ であることを用いれば
   $$\begin{aligned} E(R_i) &= E(\alpha_i + \beta_i R_M + e_i) \\ &= \alpha_i + \beta_i E(R_M) + E(e_i) \\ &= \alpha_i + \beta_i E(R_M) \end{aligned}$$
2. 各証券の期待収益率は、
   その証券に固有の部分＋市場全体の動きに関連する部分
   $\alpha_i \quad + \quad \beta_i E(R_M)$

で表される。

このとき、第２項（$\beta_i E(R_M)$）は**システマティック・リターン**（市場関連的リターン）、第１項（α_i）は**アンシステマティック・リターン**（非市場関連的リターン）という。

第 *i* 証券の収益率の分散

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{ei}^2 \tag{6}$$

（証明）

(1)式の両辺の期待値をとり、

(2)より、$E[e_i^2] = \sigma_{ei}^2$，(3)より $E[\{R_M - E(R_M)\}e_i] = 0$

であることを用いれば、

$$\begin{aligned} Var(R_i) &= E[\{R_i - E(R_i)\}^2] \\ &= E[\{(\alpha_i + \beta_i R_M + e_i) - (\alpha_i + \beta_i E(R_M))\}^2] \\ &= E[\beta_i^2 \{R_M - E(R_M)\}^2 + 2\beta_i \{R_M - E(R_M)\} e_i + e_i^2] \\ &= \beta_i^2 E[\{R_M - E(R_M)\}^2] + 2\beta_i E[\{R_M - E(R_M)\} e_i] + E[e_i^2] \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{ei}^2$$

(6)式から各証券の分散はその証券に固有の部分$\sigma_{ei}{}^2$と、市場全体の動きに関連する部分$\beta_i{}^2\sigma_M{}^2$の和であることがわかる。分散をリスクの指標と見れば、各証券の総リスクは、各証券のリスクと市場リスクの和に等しいといえる。市場リスクは**システマティック・リスク**、各証券固有のリスク（非市場リスク）は**アンシステマティック・リスク**とも呼ばれる。

以上をまとめると、

各証券の総リスク（分散）

$$\sigma_i{}^2 = \beta_i{}^2\sigma_M{}^2 + \sigma_{ei}{}^2$$

総リスク＝システマティック・リスク＋アンシステマティック・リスク

(6)式を変形すると、この関係は次のように見ることもできる。両辺を総リスク（$\sigma_i{}^2$）で除せば、

$$1 = \frac{\beta_i{}^2\sigma_M{}^2}{\sigma_i{}^2} + \frac{\sigma_{ei}{}^2}{\sigma_i{}^2}$$

この式の右辺第 1 項は、総リスクに占めるシステマティック・リスクの割合を、右辺第 2 項は、総リスクに占めるアンシステマティック・リスクの割合を示している。

ここで、β_iが回帰係数であることに着目して、

$$\beta_i = \frac{Cov(R_M,\ R_i)}{\sigma_M{}^2} = \frac{\rho_{iM}\sigma_i\sigma_M}{\sigma_M{}^2} = \frac{\rho_{iM}\sigma_i}{\sigma_M}、$$

とおけば、総リスクに占めるシステマティック・リスクの割合である右辺第 1 項は

$$\frac{\beta_i^2\sigma_M^2}{\sigma_i^2} = \frac{\left(\frac{\rho_{iM}\sigma_i}{\sigma_M}\right)^2\sigma_M^2}{\sigma_i^2} = \rho_{iM}{}^2$$

すなわち、相関係数の 2 乗となることが確認でき、さらに、相関係数の 2 乗は決定係数に等しくなることがわかる。

総リスクに占めるシステマティック・リスクの割合

＝相関係数の 2 乗＝決定係数

次に、各証券の共分散は次のように表せる。

第 i 証券、第 j 証券間の共分散

$$\sigma_{ij}=\beta_i\beta_j\sigma_M^{\ 2}$$

（証明）

(2)および(4)より、$E[e_ie_j]=0$、

(3)より $E[\{R_M-E(R_M)\}e_i]=0$ であることを用いれば、

$$\begin{aligned} Cov(R_i,\ R_j) &= E[\{R_i-E(R_i)\}\{R_j-E(R_j)\}] \\ &= E[\{\beta_i(R_M-E(R_M))+e_i\}\{\beta_j(R_M-E(R_M))+e_j\}] \\ &= \beta_i\beta_jE[\{R_M-E(R_M)\}^2]+\beta_iE[\{R_M-E(R_M)\}e_j] \\ &\quad +\beta_jE[\{R_M-E(R_M)\}e_i]+E[e_ie_j] \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_{ij}=\beta_i\beta_j\sigma_M^{\ 2}$$

3 分散投資の効果

マーケット・モデルが成立する場合の各証券の総リスクは、市場リスク（システマティック・リスク）と非市場リスク（アンシステマティック・リスク）の合計であることが示されたが、これらのリスクが分散投資によってどうなるかを考える。

いま、マーケット・モデル(1)～(4)式のもとで、n 種類の証券にそれぞれ、w_1，w_2，…，w_n の投資比率で投資すると考える。ポートフォリオの予想収益率は、投資比率をウェイトとした個別銘柄の予想収益率の加重平均であるから次のようになる。

$$
\begin{aligned}
R_P &= w_1R_1 + w_2R_2 + \cdots + w_nR_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_iR_i
\end{aligned}
$$

これより(5)式をもとにするとポートフォリオの期待収益率は次式で示される。

ポートフォリオの期待収益率

$$E(R_P)=\sum_{i=1}^{n} w_i\alpha_i+E(R_M)\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i$$

また、ポートフォリオの分散は次のように表される。

ポートフォリオの分散

$$\sigma_P{}^2=\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i\right)^2\sigma_M{}^2+\sum_{i=1}^{n} w_i{}^2\sigma_{ei}{}^2$$

ポートフォリオの分散は、上式で表され，個別証券の場合と同様に、右辺第 1 項はポートフォリオのシステマティック・リスクを意味し、右辺第 2 項はアンシステマティック・リスクを意味する。

ここで n 個の証券に均等割合で投資することを想定すると、各個別証券への投資比率は $\dfrac{1}{n}$ となる。

$$
\begin{aligned}
\sigma_P{}^2&=\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i\right)^2\sigma_M{}^2+\sum_{i=1}^{n} w_i{}^2\sigma_{ei}{}^2 \\
&=\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i\right)^2\sigma_M{}^2+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}{}^2 \\
&\leqq\beta_P{}^2\sigma_M{}^2+\frac{1}{n}\bar{\sigma}_{ei}{}^2
\end{aligned}
$$

（ただし、$\bar{\sigma}_{ei}{}^2$ は個別証券のアンシステマティック・リスクの最大値）

そして銘柄数 n を限りなく増やすと、$\frac{1}{n}\bar{\sigma}_{ei}{}^2$ は 0 に近づき、$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}{}^2$ も 0 に近づく。

$$\sigma_P{}^2 = \lim_{n\to\infty}\{\beta_P{}^2\sigma_M{}^2 + \frac{1}{n}\bar{\sigma}_{ei}{}^2\} = \beta_P{}^2\sigma_M{}^2$$

このことは、銘柄数を増やせば個別証券に固有のアンシステマティック・リスクはポートフォリオ内部で消去し合いゼロに近づくが、市場と連動するシステマティック・リスクは消去不可能であることを意味する。

結局ポートフォリオ（P）の総リスクは $\beta_P{}^2\sigma_M{}^2$（ないし $\beta_P\sigma_M$）まで限りなく逓減させることができる。これが分散投資の効果である。

$$\beta_P{}^2\sigma_M{}^2 \fallingdotseq \sigma_M{}^2$$