第1章

ポートフォリオ・マネジメント

1. 傾向と対策

「ポートフォリオ・マネジメント」は、モダン・ポートフォリオ理論（Modern Portfolio Theory）と称する一連の理論体系を骨子とする。モダン・ポートフォリオ理論は、証券アナリスト試験1次レベルのみならず2次レベルを通して、さらには全科目を通して、試験全体の性格を大きく特徴付ける「目玉」といっても過言ではないだろう。実際、この理論体系を前面に打ち出し中心テーマに据えた資格試験は、少なくともわが国においては、証券アナリスト試験の他にあまりない。

ここでは、株式をはじめとするリスク資産の収益率は正規分布に従うという仮定の下で、リスクとリターンという2つの変数を使って話が展開される。そして、まず最大の主張の1つが「リスク分散」である。良し悪し正否は別にして、古くからある「卵は1つの籠に盛るな」という投資の格言を、「分散投資の効果（ポートフォリオ効果）」として数量的・理論的に裏付け、これを手始めに投資家のリスクに対する振る舞い（リスク選好）、資本資産評価モデル（CAPM）、マーケット・モデル、パフォーマンス（運用成績）評価などなど、きわめて広範な論点を系統立てて扱ってゆく。

この分野のポイントは、まずリスク・リターンを数量的に把握するため、どうしても統計学の知識が必要となること。とくに5つの基本統計量、およびポートフォリオのリスクとリターンといった概念、計算処理に慣れることが必須である。そして「過去の出題例」を見れば明らかだが、毎回各論点から万遍なく網羅的に出題されるので、残念ながら試験対策としては、とにかく一通りのことをやっておくしかないだろう。

総まとめテキストの項目と過去の出題例

「総まとめ」の項目	過去の出題例	重要度
リターンとリスク	2022年春・第５問・Ⅲ問１、問２、問４、問５ 2022年秋・第５問・Ⅰ問２ Ⅱ問１～問５ 2023年春・第５問・Ⅰ問３ Ⅱ問２ 2023年秋・第５問・Ⅱ問１、問２、問５ 2024年春・第５問・Ⅰ問１ Ⅱ問１～問３、問５ 第６問・Ⅱ問３	A
投資家の選好	2022年春・第５問・Ⅰ問１、問２ 2022年秋・第５問・Ⅰ問１ 2023年春・第５問・Ⅰ問１、問２ 2023年秋・第５問・Ⅰ問１、問２ 2024年春・第５問・Ⅰ問２、問３ Ⅱ問４	A
マーケット・モデル	2022年春・第５問・Ⅱ問２ 2023年春・第５問・Ⅱ問３ Ⅲ問２～問４	B
CAPM	2022年春・第２問・Ⅰ問５ 第５問・Ⅰ問３ Ⅱ問１、問３～問５ 2022年秋・第５問・Ⅰ問３ Ⅱ問２ Ⅲ問１、問２、問４ 2023年春・第５問・Ⅰ問４ Ⅱ問１、問４、問５ Ⅲ問１ 2023年秋・第２問・Ⅲ問３ 第５問・Ⅰ問３ 2024年春・第５問・Ⅰ問４	A

マルチ・ファクター・モデル	2022年春・第5問・Ⅰ問5 2022年秋・第5問・Ⅲ問1～問5 2023年春・第5問・Ⅰ問5 2023年秋・第5問・Ⅲ問1～問5 2024年春・第5問・Ⅲ問1～問5	A
効率的市場仮説	2022年春・第5問・Ⅰ問4 2022年秋・第5問・Ⅰ問4 2023年秋・第5問・Ⅰ問4 2024年春・第5問・Ⅰ問5	B
ポートフォリオ・マネジメントと評価	2022年春・第6問・Ⅰ問2、問3 Ⅱ問1～問5 2022年秋・第5問・Ⅰ問5 第6問・Ⅰ問1、問5 Ⅱ問1～問5 2023年春・第6問・Ⅰ問2 Ⅱ問1、問3～問5 2023年秋・第3問・Ⅰ問5 第5問・Ⅰ問5 Ⅱ問3、問4 第6問・Ⅰ問1 Ⅱ問1～問5 2024年春・第6問・Ⅰ問1、問5 Ⅱ問1、問2、問5	A
計量分析と統計学	2022年春・第5問・Ⅲ問3 2023年春・第5問・Ⅲ問5	C
機関投資家と個人投資家	2022年春・第6問・Ⅰ問1、問4、問5 2022年秋・第6問・Ⅰ問2～問4 2023年春・第6問・Ⅰ問1、問3～問5 Ⅱ問2 2023年秋・第6問・Ⅰ問2～問5 2024年春・第6問・Ⅰ問2～問4 Ⅱ問4	A

2. ポイント整理と実戦力の養成

1　投資の基礎概念

Point ①　現在価値と将来価値

証券分析では、金利計算として、主に**複利計算**が使われる。元金X_0円は、年利r%のとき、１年複利で計算すれば、n年後に$X_n=X_0(1+r)^n$ 円となる。ところでこのことは、現在のX_0円は、n年後の将来、X_n円の価値をもつと考えることもできる。このように考えたとき、現在の元金X_0円を**現在価値**と、それをn年間運用したときの受取X_n円を**将来価値**と、それぞれ呼ぶ。この現在価値と将来価値との間には、次のような関係が成立する。

$$X_n=(1+r)^n\ X_0$$

または、

$$X_0=\frac{1}{(1+r)^n}\ X_n$$

現在価値X_0の式における$\frac{1}{(1+r)^n}$は、「n年後の１円の現在価値」を表しており、**割引係数**（ディスカウント・ファクター）と呼ばれる。

以上は、年１回複利の場合の計算であるが、年間の複利回数の頻度が高くなると、次のように計算される。

	将来価値	現在価値
半年（年２回）複利	$X_n=\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}X_0$	$X_0=\frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}}X_n$
	⋮	⋮
年m回複利	$X_n=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}X_0$	$X_0=\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}}X_n$

さらに、年複利回数のmを増やしその極限をとると、$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}=e^{rn}$（ただし、$e$は自然対数の底で、$e=2.71828...$）となるから、次のような**連続複利**による計算がデリバティブ評価において用いられることが多い。

	将来価値	現在価値
連続複利	$X_n = e^{rn}X_0$	$X_0 = \dfrac{X_n}{e^{rn}} = e^{-rn}X_n$

Point ② 投資収益率

証券分析では、投資もしくは資金運用による収益（リターン）を測定する尺度として、主に**投資収益率**（R）を使う。投資収益率とは、投資額に対する収益の割合であり、次のように表される。

$$\text{投資収益率}(R) = \frac{\text{収益}}{\text{投資額}}$$

Point ③ 算術平均と幾何平均

過去の投資収益率のデータより、多期間にわたる収益率が与えられたとき、この投資収益率（リターン）の特徴を調べることが証券分析における関心事となる。投資収益率の特徴を捉えるための基本的な方法は、多期間にわたる投資収益率の平均を求めることである。代表的な平均の計算方法には、**算術平均と幾何平均**とがある。いま、n期間にわたって投資収益率R_1、…、R_nが観測されたとする。このとき、算術平均$\overline{R_a}$と幾何平均$\overline{R_g}$とは、それぞれ、次のように表される。

⑴ **算術平均**

$$\overline{R_a} = \frac{1}{n}(R_1 + \cdots + R_n) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_t$$

⑵ **幾何平均**

$$\overline{R_g} = \{(1+R_1)\times\cdots\times(1+R_n)\}^{\frac{1}{n}} - 1 = \left\{\prod_{t=1}^{n}(1+R_t)\right\}^{\frac{1}{n}} - 1$$

なお、幾何平均が算術平均を上回ることはない。

このことを、2期の収益率のデータがR_1とR_2であったとして確かめてみることにすると、

算術平均：$\overline{R_a} = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$

幾何平均：$\overline{R_g} = \sqrt{(1+R_1)(1+R_2)} - 1$

である。

ここで、

$$\left(1+\overline{R_a}\right)^2-\left(1+\overline{R_g}\right)^2=\left(1+\frac{R_1+R_2}{2}\right)^2-\left(1+\sqrt{(1+R_1)(1+R_2)}-1\right)^2$$

$$=\left\{\frac{(1+R_1)+(1+R_2)}{2}\right\}^2-\left(\sqrt{(1+R_1)(1+R_2)}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left\{(1+R_1)^2+2(1+R_1)(1+R_2)+(1+R_2)^2\right\}$$

$$-(1+R_1)(1+R_2)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{(1+R_1)^2-2(1+R_1)(1+R_2)+(1+R_2)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{(1+R_1)-(1+R_2)\right\}^2$$

$$\geqq 0$$

という関係から、

$$\left(1+\overline{R_a}\right)\geqq\left(1+\overline{R_g}\right)$$

が成立する。これより、幾何平均が算術平均よりも大きくなることは決してないことが明らかとなる。なお、この関係式で等号が成立する（幾何平均と算術平均が等しくなる）のは、$R_1 = R_2$ のときである。

また、過去のリターンデータの平均によって

将来の期待リターンを推定する場合…過去のリターンの算術平均リターン

過去の実績リターンを計測する場合…過去のリターンの幾何平均リターン

を用いるべきであるとされている。

これは、算術平均は統計的には最尤推定量（もっとも確からしい推定量）であるという性質が知られているため将来の予測にふさわしく、幾何平均は複利の効果を考慮できるため過去の実績の把握に適していると考えられるためである。

例題 1

《2004. 5. Ⅱ. 1 ・ 2》

以下の問 1 および問 2 に答えよ。

下表は過去 4 年間の X 社株式の株価と配当の推移である。

表　X 社の株価と 1 株当たり配当

	期首株価	期末株価	配当
1 年目	1,200円	920円	10円
2 年目	920円	1,100円	20円
3 年目	1,100円	1,000円	30円
4 年目	1,000円	1,400円	30円

（注）配当支払時期は期末。

問 1　4 年間の算術平均投資収益率は年率何％でしたか。

A　5 ％

B　6 ％

C　7 ％

D　8 ％

E　9 ％

問 2　4 年間の幾何平均投資収益率は年率何％でしたか。

A　5 ％

B　6 ％

C　7 ％

D　8 ％

E　9 ％

解答　問 1　E　　問 2　B

解　説

問１　算術平均

$$投資収益率=\frac{収益}{投資額}=\frac{キャピタル・ゲイン（ロス）+インカム・ゲイン}{投資額}$$

より、Ｘ社株式の１年目～４年目までの各年の投資収益率は、

１年目　$\frac{(920-1{,}200)+10}{1{,}200}=-0.225(-22.5\%)$

２年目　$\frac{(1{,}100-920)+20}{920}=0.2173\ldots\approx0.217(21.7\%)$

３年目　$\frac{(1{,}000-1{,}100)+30}{1{,}100}=-0.0636\ldots\approx-0.064(-6.4\%)$

４年目　$\frac{(1{,}400-1{,}000)+30}{1{,}000}=0.430(43.0\%)$

よって、算術平均投資収益率は、

$$\frac{(-22.5)+21.7+(-6.4)+43.0}{4}=8.9\ldots\approx9(\%)$$

問２　幾何平均

４年間の幾何平均投資収益率は、

$$\sqrt[4]{(1-0.225)(1+0.217)(1-0.064)(1+0.43)}-1=0.059\ldots\approx0.06=6(\%)$$

幾何平均の計算にあたっては、投資収益率を％表示そのままではなくそれを小数表示した数値（例えば－22.5％であれば－0.225）を使って計算する点に注意する。なお、算術平均の計算については、上で示したように、％表示そのままで計算してもよいし、小数表示の数値で計算してもよい（あえていえば、％表示の数値で計算した方が電卓の計算の手間が若干少なくてすむ分だけおすすめといえる）。

2　個別証券のリスク・リターン構造

Point ① 投資収益率

$$投資収益率 = \frac{収益}{投資額}$$

において、投資額も収益もともに確定したものと考えることは、投資家が、いま行おうとしている投資について、どれだけの収益をもたらすものか事前に確実に知っていることを意味している。このことは、投資対象として、投資時点で投資収益率が確定している証券である**無リスク証券**（リスクフリー資産または**安全証券**）だけを考えていることとなる。これに対して、投資時点で投資収益率が確定していない証券である**リスク証券**をも投資対象に含めた場合、投資家は、将来得られるであろう収益を予想する必要がある。現代ポートフォリオ理論の最大のポイントは、この予想される収益を**確率変数**とみなすことにある。予想される収益を確率変数と考えたとき、それによって得られる投資収益率も確率変数となる。これ以後、ある個別証券iの投資収益率をR_iと示す。

Point ② 確率変数と確率分布（「計量分析」関連事項）

確率変数とは、いろいろな値をいろいろな確率でとるような変数であり、そこでは、そのとりうる値とその値が実現する確率とが対応付けられている。その対応関係は**確率分布**と呼ばれる。ある確率変数の特徴を捉えるということは、確率分布のもつ特徴を捉えることである。そのためのもっとも基本的な統計量として、**期待値**と**分散**（または、**標準偏差**）がある。期待値はその分布の**中心的な位置**を示し、分散（または、標準偏差）はその分布の**チラバリ具合**を示す。現代ポートフォリオ理論では、この期待値と分散（または、標準偏差）によって、確率変数とみなした投資収益率の特徴を捉えることとなる。そこでは、投資収益率の期待値を証券の**リターン**の尺度として使い、投資収益率の分散（または、標準偏差）を証券の**リスク**の尺度として使う。

Point ③　リターンの尺度

リターンの尺度としては、投資収益率の期待値が使われる。この投資収益率の期待値は、**期待投資収益率（または期待収益率）**と呼ばれる。確率変数とみなした個別証券iの収益率R_iの期待値$E(R_i)$は、次のように定義される。

$$E(R_i) = p_1 R_{1,i} + \cdots + p_n R_{n,i}$$
$$= \sum_{t=1}^{n} p_t R_{t,i}$$

ただし、

n　：証券iの収益率のとりうる値の個数

$R_{t,i}$　：収益率のとりうる値のうち第t番目の投資収益率

p_t　：第t番目の投資収益率が実現する確率

Point ④　リスクの尺度

⑴　**分散** σ_i^2

確率変数とみなした個別証券iの収益率R_iの分散σ_i^2は、次のように定義される。

$$\sigma_i^2 = p_1\left\{R_{1,i} - E(R_i)\right\}^2 + \cdots + p_n\left\{R_{n,i} - E(R_i)\right\}^2$$
$$= \sum_{t=1}^{n} p_t\left\{R_{t,i} - E(R_i)\right\}^2$$
$$= E\left\{R_i - E(R_i)\right\}^2$$
$$= E(R_i^2) - \left\{E(R_i)\right\}^2$$

⑵　**標準偏差** σ_i

$$\sigma_i = \sqrt{p_1\left\{R_{1,i} - E(R_i)\right\}^2 + \cdots + p_n\left\{R_{n,i} - E(R_i)\right\}^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{t=1}^{n} p_t\left\{R_{t,i} - E(R_i)\right\}^2}$$
$$= \sqrt{\sigma_i^2}$$

このように、標準偏差は分散の正の平方根で表される。

例題 2

以下の問 1 から問 3 に答えよ。

表１．１には、Ａ社株の投資収益率 R_A の確率分布が示されている。

表１．１：Ａ社の投資収益率の確率分布

景気状態	好況	平常	不況
確率	0.3	0.5	0.2
予想される収益率（%）	25	5	−10

問 1　Ａ社の期待投資収益率 $E(R_A)$ はいくらか。

問 2　Ａ社の投資収益率の分散 σ_A^2 はいくらか。

問 3　Ａ社の投資収益率の標準偏差 σ_A はいくらか。

解答

問 1　8 %

問 2　156

問 3　12.5%

解　説

問１　期待投資収益率

$$E(R_A)=0.3\times25+0.5\times5+0.2\times(-10)$$
$$=8\ (\%)$$

これより、Ａ社の期待投資収益率は８％となる。

問２　投資収益率の分散

$$\sigma_A^2=0.3\times(25-8)^2+0.5\times(5-8)^2+0.2\times(-10-8)^2$$
$$=156$$

これより、Ａ社の分散で測ったリスクは156となる。

問３　投資収益率の標準偏差

$$\sigma_A=\sqrt{\sigma_A^2}$$
$$=\sqrt{156}$$
$$\fallingdotseq 12.5(\%)$$

これより、Ａ社の標準偏差で測ったリスクは12.5％となる。

3　投資家の選好

Point ① 効用関数と期待効用

資産運用により投資家が得られる満足の程度を**効用**（utility）という。この効用は、将来の資産額に依存して決まると考えられるので、一般的には、投資家の効用を資産額の関数として、$U = U(W)$（ただし、U：ある投資家の効用、W：将来得られる資産額）と表し、**効用関数**（utility function）と呼ぶ。

不確実性下の投資家の意思決定を分析する場合には、効用の期待値である**期待効用**（expected utility）を用いる。

期待効用＝（状態ごとの確率×効用）の合計

$$E[U] = p_1U(W_1)+p_2U(W_2)+\cdots+p_nU(W_n) = \sum_{s=1}^{n} p_sU(W_s)$$

ただし、p_s：状態 s（$s=1,\cdots,n$）の生起確率、

W_s：状態 s における資産額

このように期待効用が定義できる効用関数をフォンノイマン＝モルゲンシュテルン型効用関数と呼び、ファイナンス理論では、投資家はこうして定義される期待効用の最大化をはかるものと考えて分析が行われる。

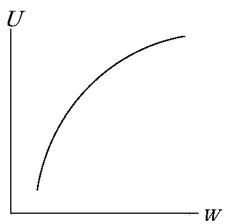
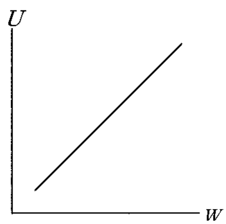
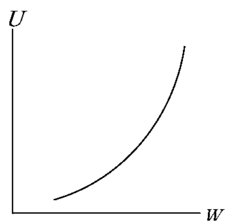
Point ② リスクに対する投資家の3タイプ

投資家のリスクに対する態度は、大別すると、次の3タイプに分類される。

(1)　リスク回避型	資産額の期待値が同じであれば、資産額のばらつき（リスク）の小さい方を選好する。
(2)　リスク中立型	資産額の期待値のみに関心があり、資産額の期待値が同じであれば、資産額のばらつき（リスク）の大小に関わらず同程度に選好する。
(3)　リスク追求型	資産額の期待値が同じであれば、資産額のばらつき（リスク）の大きい方を選好する。

これら3タイプの投資家の資産額に対する効用関数は、次のように描かれる。

図1－3－1　投資家のリスクに対する態度と効用関数

	投資家のタイプ		
	(1)リスク回避型	(2)リスク中立型	(3)リスク追求（愛好）型
形状	 上に凸	 直線	 下に凸
関数	凹関数	（1次関数）	凸関数
限界効用	逓減	一定	逓増

※　リスク回避度が高まるにつれて、効用関数の曲率は大きくなる（＝上への凸性が強くなる）。

Point ③ 確実性等価額

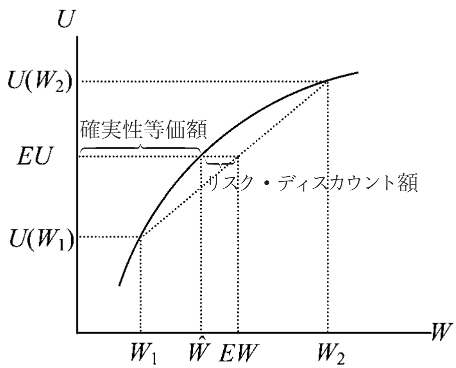
確実性等価額（certainty equivalent）とは，不確実性を伴う投資の期待効用と効用が等しくなる確実な投資の場合の資産額をいう。

例えば、将来の資産額が1/2ずつの確率で W_1、W_2 となる場合、期待効用 EU は、

$$EU = \frac{1}{2}U(W_1) + \frac{1}{2}U(W_2)$$

と表せるから、$U(W_1)$ と $U(W_2)$ の中点の高さになる。これと等しい効用をもたらす確実な資産額は $\hat{W}$ であり、これが確実性等価額である。

図１－３－２　確実性等価額



この場合、将来の資産額の期待値 EW は W_1、W_2 の中点となるから、このグラフのように効用関数が上に凸に描かれるリスク回避型投資家の場合、確実性等価額 $\hat{W}$ は将来の資産額の期待値 EW を下回ることになる。この将来の資産額の期待値 EW と確実性等価額 $\hat{W}$ の差をリスク・ディスカウント額という。

Point ④ 平均・分散アプローチと投資家の無差別曲線

マーコヴィッツによる平均・分散アプローチでは、

リターンの指標…収益率の期待値（期待収益率）

リ　ス　クの指標…収益率の分散（または標準偏差）

を用いる。平均・分散アプローチが成立する世界では、期待効用は

$$E[U_i] = E[R] - \lambda_i \sigma^2$$

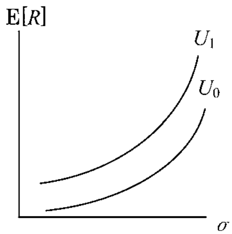
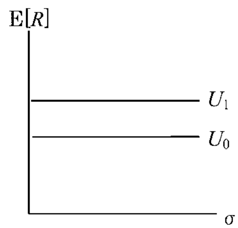
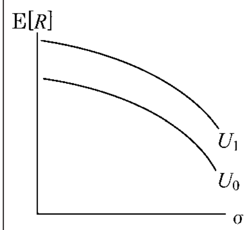
ただし、U_i：投資家iの効用、$E[R]$：期待収益率、

σ：収益率の標準偏差、λ_i：投資家iのリスク回避係数

などと表される。

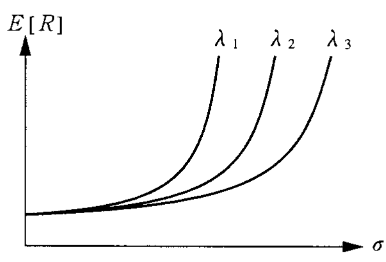
また、効用が等しいリスクとリターンの組合せである**無差別曲線**（indifference curve）は次のように描かれ、上方に位置する無差別曲線ほど効用水準は高い（$U_1 > U_0$）。

図１－３－３　投資家のリスクに対する態度と無差別曲線

	投資家のタイプ		
	⑴リスク回避型 （$\lambda_i > 0$）	⑵リスク中立型 （$\lambda_i = 0$）	⑶リスク追求（愛好）型 （$\lambda_i < 0$）
形状	 右上がりの曲線	 水平な直線	 右下がりの曲線

ファイナンス理論では、通常、投資家はリスク回避型であると仮定される。

図１－３－４　危険回避者のリスク回避係数と無差別曲線



危険回避係数λ：$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$

例題 3　期待効用最大化をはかる投資家の選好に関する次の記述の正誤を答えよ。

A　投資家がリスク回避型であるとき、投資家の得る効用を資産価値の関数として表した効用関数は凹関数である。

B　リスク回避度の高い投資家の確実性等価額は、リスク回避度の低い投資家の確実性等価額よりも大きい。

C　投資家がリスク回避型であるとき、確実性等価額はリスク資産の価値の期待値よりも大きい。

解答　A　正　B　誤　C　誤

解　説

A　正　投資家がリスク回避型であるとき、投資家の効用関数のグラフは上に凸になる。グラフが上に凸になる関数は凹関数と呼ばれる。

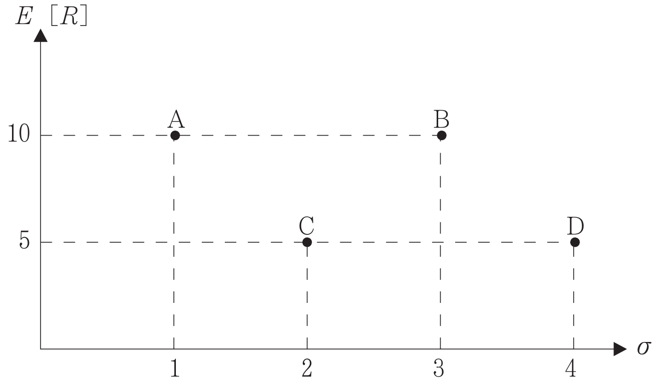
B　誤　リスク回避度の高い投資家の効用関数の曲率は、リスク回避度の低い投資家の効用関数の曲率よりも大きくなる分だけ、リスク回避度の高い投資家の確実性等価額の方が小さくなる。

C　誤　投資家がリスク回避型であるとき、投資家の効用関数のグラフは上に凸になるため、確実性等価額はリスク資産の価値の期待値よりも小さくなる。

例題４

以下の問１から問３に答えよ。

期待投資収益率と標準偏差の平面においてA、B、C、Dの４つのポートフォリオがグラフのように位置している。



問１　リスク中立者Ｘにとって最も効用の低いポートフォリオはどれか。

問２　リスク回避者Ｙにとって最も効用の高いポートフォリオはどれか。

問３　Ｙの効用関数は次のように表されるものとする。

$$\boldsymbol{U = E[R] - a \times \sigma^2}$$

$\boldsymbol{U}$：Ｙの効用

$\boldsymbol{E[R]}$：期待投資収益率

$\boldsymbol{a}$：リスク回避係数

$\boldsymbol{\sigma}$：収益率の標準偏差

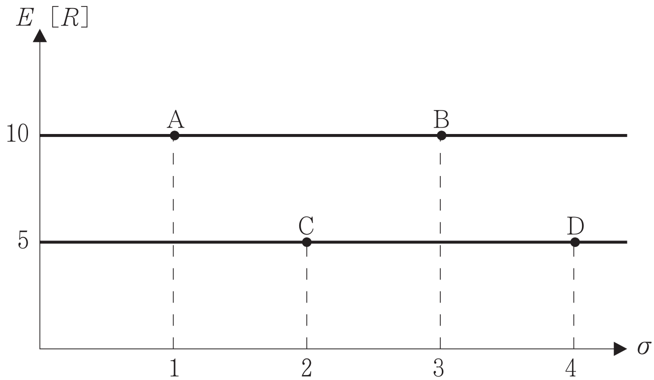
ＹにとってポートフォリオＢによる効用がＣよりも大きい場合、aはいくらになるか。

解答　問１　C、D　　問２　A　　問３　0＜a＜1

解　説

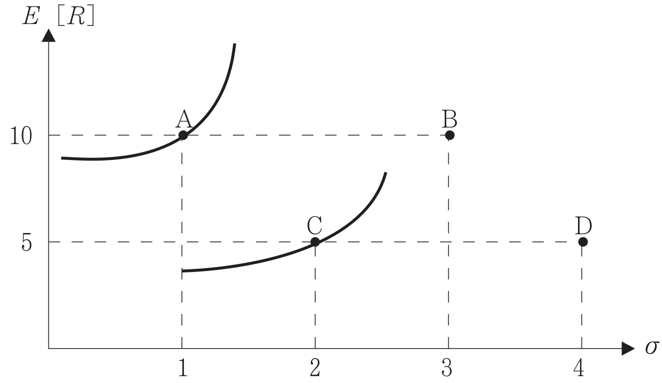
問 1

リスク中立者にとってリターン（期待投資収益率）は高ければ高いほど効用を高めることになるが、リスク（標準偏差）に関しては無関心である。すなわち、リターンが同じであればリスクが大きくても小さくても効用には影響しない。したがって、ポートフォリオ A と B の効用は同じ、つまり無差別であり、また、ポートフォリオ C と D も無差別である。しかし、A と B による効用の大きさと、C と D による効用の大きさは、リターンが異なるため、リターンの高い前者（A と B）の効用のほうが大きいことになる。よって、正解は C と D である。なお、A と B、および C と D を通る無差別曲線は以下のとおりである。



問 2

リターンに関してはリスク回避者も中立者と同様に高ければ高いほど効用を高めることになるが、リスクに関しては小さい方が効用を高める。したがって、4 つのポートフォリオのうちリターンが一番高く、かつ、リスクの一番小さな A がリスク回避者 Y の効用を最も高めることになる。よって、正解は A である。なお、A を通る無差別曲線と C を通る無差別曲線は次のとおりである。



問３　効用関数に従ってポートフォリオＢとＣの効用を表すと次のようになる。

Ｂ：$U = E[R] - a \times \sigma^2 = 10 - a \times 3^2$

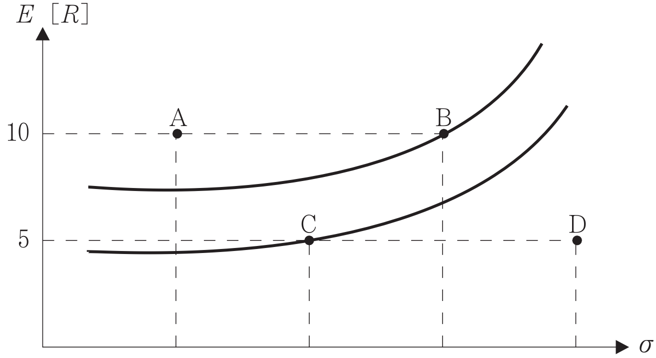
Ｃ：$U = E[R] - a \times \sigma^2 = 5 - a \times 2^2$

ポートフォリオＢによる効用がＣよりも大きくなるような a は、

$10 - a \times 3^2 > 5 - a \times 2^2$

$a < 1$

となる。Ｙはリスク回避者なので、$0 < a < 1$ となる。



例題 5

《2011（春）. 6 . Ⅰ. 1》

投資家の選好に関する次の記述のうち、正しいものはどれですか。

A　資産額が増えるほど、どん欲にお金を求める投資家は、リスク追求型の効用を持つといえる。

B　ある確率くじのリスク・ディスカウント額が大きいほど、その確率くじに払ってもよいとする価格は賞金額の期待値に近づく。

C　Aさんの効用関数はBさんの効用関数を3倍したものとすると、AさんはBさんよりもリスク資産を多く需要する。

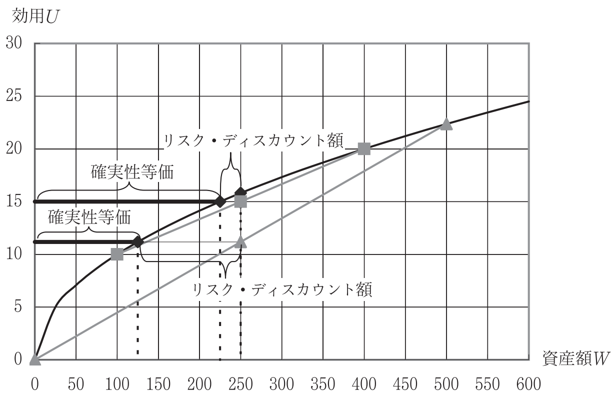
D　リスク回避度は、効用曲線の傾きの変化とは関係がない。

解答　A

解　説

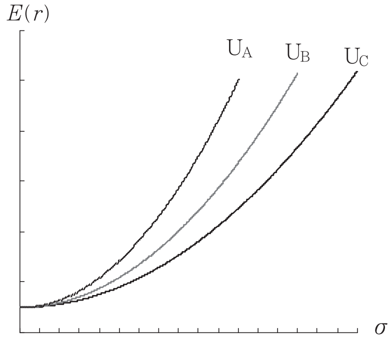
Ａ　正しい。リスク追求型の効用関数は凸関数であり、限界効用逓増型である。

Ｂ　正しくない。ある確率くじのリスク・ディスカウント額が小さいほど、その確率くじに払ってもよいとする価格（確実性等価額）は賞金額の期待値に近づく。



Ｃ　正しくない。

Ｄ　正しくない。無差別曲線の傾きは、リスクの増加に対する対価として投資家がどれだけリターンを要求するかを示している。この傾斜が急な無差別曲線を持つ投資家ほど、リスク回避度が高い投資家ということができる（以下ではリスク回避度：Ａ氏＞Ｂ氏＞Ｃ氏）。



4　ポートフォリオ理論

Point ① ポートフォリオの投資収益率

証券iと証券jの２つの証券からだけ構成されるポートフォリオPを考える。いま、ポートフォリオPには、証券iと証券jが、$w_i : w_j$（ただし、$w_i + w_j = 1$）の割合で含まれているとする（ここで、w_iとw_jをそれぞれ証券iと証券jの投資比率という）。このとき、証券iの投資収益率がR_iであり、証券jの投資収益率がR_jであるとすれば、ポートフォリオPの投資収益率R_Pは次のように表される。

$$R_P = w_i R_i + w_j R_j \qquad (1\text{-}1)$$

ただし、　$w_i + w_j = 1$

この関係式において、個別証券の投資収益率（R_iとR_j）を確率変数とみなした場合、ポートフォリオPの投資収益率R_Pも確率変数となることに注意すること。

Point ② ポートフォリオのリターン

ポートフォリオPのリターンは、ポートフォリオの投資収益率R_Pの期待値（期待投資収益率）によって測られる。証券iと証券jだけから構成されるポートフォリオの投資収益率（式（１-１）の期待値$E(R_P)$）を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} E(R_P) &= E(w_i R_i + w_j R_j) \\ &= E(w_i R_i) + E(w_j R_j) \\ &= w_i E(R_i) + w_j E(R_j) \end{aligned}$$

Point ③ ポートフォリオのリスク

ポートフォリオPのリスクは、ポートフォリオの投資収益率R_Pの分散、または、標準偏差によって測られる。

⑴　**共分散**

$$
\begin{aligned}
Cov(R_i,R_j) &= p_1\bigl(R_{1,i}-E(R_i)\bigr)\bigl(R_{1,j}-E(R_j)\bigr)+\cdots \\
&\quad +p_n\bigl(R_{n,i}-E(R_i)\bigr)\bigl(R_{n,j}-E(R_j)\bigr) \\
&= \sum_{t=1}^{n} p_t\bigl(R_{t,i}-E(R_i)\bigr)\bigl(R_{t,j}-E(R_j)\bigr) \\
&= E\Bigl[\bigl(R_i-E(R_i)\bigr)\bigl(R_j-E(R_j)\bigr)\Bigr]
\end{aligned}
$$

ただし、

n　：証券i，jの投資収益率のとりうる値の個数

$R_{t,i}$　：証券iの収益率のとりうる値のうち第t番目の投資収益率

p_t　：証券i，jの収益率のとりうる値のうち第t番目の投資収益率が実現する確率

⑵　**相関係数**

確率変数とみなした証券iと証券jの投資収益率間の相関係数ρ_{ij}は、次のように定義される。

$$
\rho_{ij} = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_i\ \sigma_j}
$$

これより

$$Cov(R_i,\ R_j) = \rho_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j$$

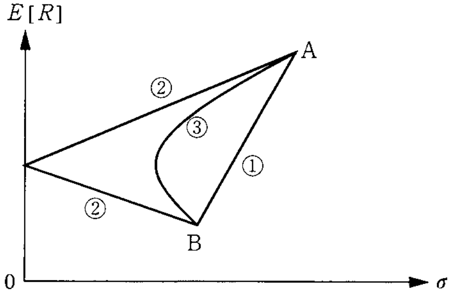
⑶　**ポートフォリオの分散と標準偏差**

証券iと証券jだけから構成されるポートフォリオの投資収益率（式（１-１））の分散σ_P^2を求めると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= E\bigl\{R_P-E(R_P)\bigr\}^2 \\
&= E\Bigl\{(w_i R_i+w_j R_j)-\bigl(w_i E(R_i)+w_j E(R_j)\bigr)\Bigr\}^2 \\
&= E\Bigl\{w_i\bigl(R_i-E(R_i)\bigr)+w_j\bigl(R_j-E(R_j)\bigr)\Bigr\}^2 \\
&= E\Bigl\{w_i^2\bigl(R_i-E(R_i)\bigr)^2+w_j^2\bigl(R_j-E(R_j)\bigr)^2+2w_i\,w_j\bigl(R_i-E(R_i)\bigr)\bigl(R_j-E(R_j)\bigr)\Bigr\} \\
&= w_i^2E\bigl\{R_i-E(R_i)\bigr\}^2+w_j^2E\bigl\{R_j-E(R_j)\bigr\}^2+2w_i\,w_j\,E\Bigl\{\bigl(R_i-E(R_i)\bigr)\bigl(R_j-E(R_j)\bigr)\Bigr\} \\
&= w_i^2\sigma_i^2+w_j^2\sigma_j^2+2w_i\,w_j\,Cov\bigl(R_i,\ R_j\bigr) \\
&= w_i^2\sigma_i^2+w_j^2\sigma_j^2+2w_i\,w_j\,\rho_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j
\end{aligned}
$$

Point ④ 投資機会集合

図１－４－１　相関係数と投資機会集合



①　正の完全相関（$\rho_{AB} = +1$）

　　証券A、Bを表す点を結んだ直線

②　負の完全相関（$\rho_{AB} = -1$）

　　証券A、Bを表す点を通る折れ線

③　$-1 < \rho_{AB} < +1$

　　証券A、Bを表す点を通る双曲線

Point ⑤ ポートフォリオ効果

証券iと証券jだけから構成されるポートフォリオの投資収益率の分散σ_P^2は次のようであった。

$$\sigma_P^2 = w_i^2\sigma_i^2 + w_j^2\sigma_j^2 + 2w_i w_j Cov(R_i, R_j)$$

$$= w_i^2\sigma_i^2 + w_j^2\sigma_j^2 + 2w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

これより、ポートフォリオの投資収益率の標準偏差σ_Pは次のように表される。

$$\sigma_P = \sqrt{w_i^2\sigma_i^2 + w_j^2\sigma_j^2 + 2w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}$$

この式において、相関係数が

$$-1 \leqq \rho_{ij} \leqq 1$$

の間の値をとることに注意すれば、両証券に正の比率で投資する場合にはポートフォリオの投資収益率の標準偏差には次のような関係が成立する。

$$\sigma_P = \sqrt{w_i^2\sigma_i^2 + w_j^2\sigma_j^2 + 2w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}$$
$$\leqq \sqrt{(w_i\sigma_i + w_j\sigma_j)^2}$$
$$= w_i \sigma_i + w_j \sigma_j$$

この関係式より、ポートフォリオの標準偏差で測ったリスクは、証券iと証券jのそれぞれの投資収益率の標準偏差をその投資比率で加重した値（$w_i \sigma_i + w_j \sigma_j$）よりも小さいか（$-1 \leqq \rho_{ij} < 1$のとき）、または同じとなる（$\rho_{ij} = 1$のとき）ことがわかる。このことは、複数の証券に分散して投資することによって、**ポートフォリオのリスクが構成証券のリスクの加重平均以下に下がる**ことを意味している。この効果は、**ポートフォリオ効果**、または、**分散投資の効果**と呼ばれている。

例題６

以下の問１から問３に答えよ。

証券Ｘと証券Ｙの投資収益率の期待値（年率）、標準偏差（年率）、および共分散は（表）の通りである。

（表）証券Ｘと証券Ｙのリスク・リターン構造

	証券Ｘ	証券Ｙ
期待値	6％	10％
標準偏差	12％	27％
共分散	81	

問１　証券Ｘと証券Ｙの収益率の相関係数は、次のうちどれか。

A　−0.35

B　　0.00

C　+0.25

D　+0.65

問２　総投資金額１億円のうち、6,000万円を証券Ｘ、4,000万円を証券Ｙに投資した場合、このポートフォリオの期待収益率と収益率の標準偏差の組み合わせとして、正しいものは次のうちどれか。

A　 7.6％　　　14.4％

B	7.6%	18.0%
C	8.2%	15.6%
D	8.2%	19.5%

問３　問２のポートフォリオの投資収益率が正規分布に従うものとして、次の記述のうち正しいものはどれか。

A　このポートフォリオの投資収益率が＋22%以上の値をとる確率は約３％である。

B　このポートフォリオの投資収益率は約68%の確率で－6.8%から＋22%の間の値をとる。

C　このポートフォリオの投資収益率が－6.8%以下の値をとる確率は約５％である。

D　このポートフォリオの投資収益率は正規分布に従うと仮定しているので、事前にどのような値をとりうるかを推定することはできない。

解答　問１　C　　問２　A　　問３　B

解　説

問１　相関係数

証券Ｘの投資収益率R_Xと証券Ｙの投資収益率R_Yの相関係数$\rho_{X,Y}$は次のように計算される。

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(R_X, R_Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

ただし、$Cov(R_X, R_Y)$：証券Ｘと証券Ｙの投資収益率の共分散、

σ_X：証券Ｘの投資収益率の標準偏差、

σ_Y：証券Ｙの投資収益率の標準偏差。

したがって、証券Ｘと証券Ｙの収益率の相関係数は、

$$\rho_{X,Y} = \frac{81}{12 \times 27} = +0.25$$

となる。

問２　ポートフォリオの期待収益率と標準偏差

２証券で構成されるポートフォリオの期待収益率$E(R_P)$、および収益率の標準偏差σ_Pは次のように計算される。

$$E(R_P) = w_X E(R_X) + w_Y E(R_Y)$$

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2}$$

$$= \sqrt{w_X^2 \sigma_X^2 + w_Y^2 \sigma_Y^2 + 2 w_X w_Y Cov(R_X, R_Y)}$$

ただし、w_X：証券Ｘへの投資比率、w_Y：証券Ｙへの投資比率。

ここで、w_X＝0.6、w_Y＝0.4なので、このポートフォリオの期待収益率と標準偏差は、

$$E(R_P) = 0.6 \times 6\% + 0.4 \times 10\% = 7.6\%$$

$$\sigma_p = \sqrt{0.6^2 \times 12^2 + 0.4^2 \times 27^2 + 2 \times 0.6 \times 0.4 \times 81}$$

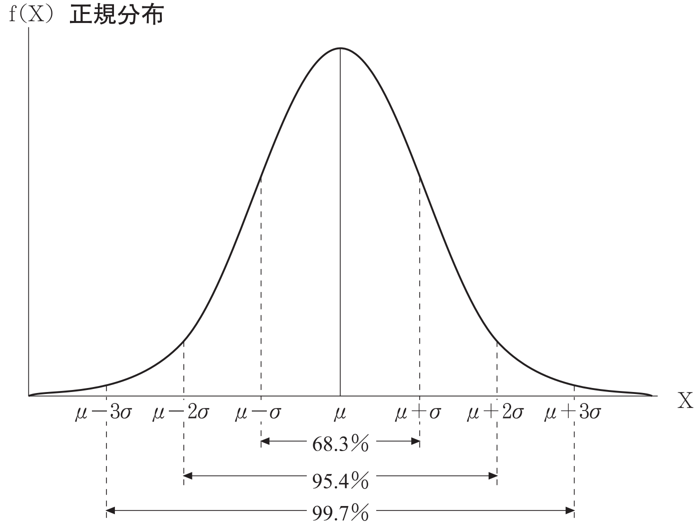
$$= 14.4\%$$

となる。

問３　正規分布の性質（「計量分析」関連問題）

ポートフォリオの投資収益率が平均（期待値）：μ、標準偏差：σの正規分布に従うとき、このポートフォリオの投資収益率が$\mu-\sigma$から$\mu+\sigma$の間に収まる確率は約68.３%であることが知られている。さらに、$\mu-2\sigma$から$\mu+2\sigma$の間に収まる確率は約95.４%、$\mu-3\sigma$から$\mu+3\sigma$の間に収まる確率は約99.７%であることが知られている。したがって、問２のポートフォリオの投資収益率が－6.８%（＝7.６%－14.４%）から＋22%（＝7.６%＋14.４%）の間に収まる確率は約68%である。

なお、Ａ　このポートフォリオの投資収益率が＋22%以上の値をとる確率、およびC　このポートフォリオの投資収益率が－6.８%以下の値をとる確率はいずれも約16%（＝（100%－68%）÷２）である（グラフ参照）。



例題 7

以下の問 1 、問 2 に答えよ。(「計量分析」関連問題)

SP500株価指数の 1 年物金利に対する超過収益率は平均(μ) 6 %、標準偏差(σ)20%の正規分布で近似できるといわれる。これは1926年以降のSP500、および 1 年物金利の年次データに基づく仮説である。必要に応じて標準正規分布表を使い、以下の設問に解答せよ。

問 1　95%信頼区間(真の超過収益率の平均(μ)が95%の確率でとりうる範囲)を求めよ。

問 2　現在の 1 年物金利は 4 %である。SP500の収益率がマイナスになる確率を求めよ。

標準正規分布表（抜粋）

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916

解答

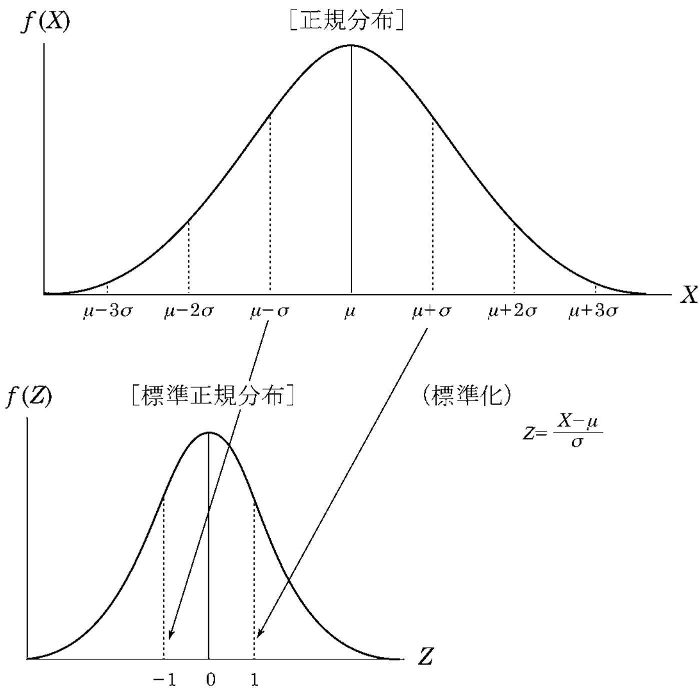
問 1　$-33.2\% \leqq \mu \leqq 45.2\%$

問 2　30.85%

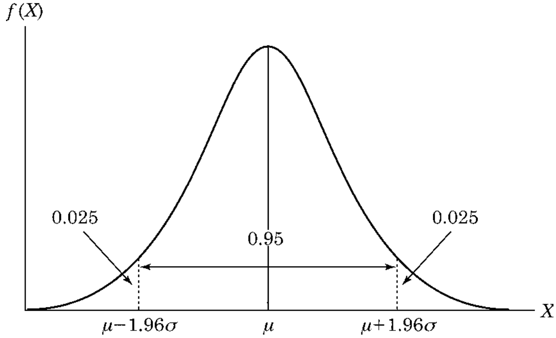
解　説

正規分布の問題である。ポイントは次の 3 点。

- 正規分布は左右対称である
- 正規分布の標準化
- 標準正規分布表を読みとる



問１　正規分布で95％信頼区間は±1.96σであるから、６％±1.96×20％＝＋45.2％or−33.2％。したがって95％信頼区間は〔−33.2％、＋45.2％〕。



標準正規分布表から±1.96を読みとる（なお、1.00−0.025＝0.975に注意）。

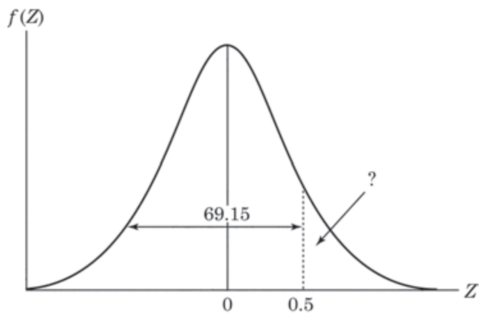
→小数第２位

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮										
1.7										
1.8										
1.9							.9750			
2.0										
2.1										
⋮										

↑
小数第１位まで

問２　SP500の収益率をR（％）とする。短期金利（i）が４％、超過収益率（$R-i\equiv x$）の平均が６％だから、SP500の収益率（R）の期待値は10％である。つまり、SP500の収益率がマイナス（$R<0$）になるのは、超過収益率がー４％を下回る（$x<-4$）ときである。ここで、超過収益率の平均（μ）が６％、標準偏差（σ）が20％であることに注意して、SP500の収益率がマイナス（$R<0$）になるz値を求めれば、$z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}<\dfrac{-4-6}{20}=-0.5$ である。よって、SP500の収益率がマイナスになる確率Prob$\{R<0\}$は、$z<-0.5$となる確率Prob$\{z<-0.5\}$に等しい。

次に、Prob$\{z<-0.5\}$を求めるには、標準正規分布表を用いる。ただし、問題で与えられた標準正規分布表には$z=-0.5$はないので、正規分布が左右対称であることを利用して、$z>0.5$となる確率Prob$\{z>0.5\}$（下図の右側「？」部分の面積）を求める。



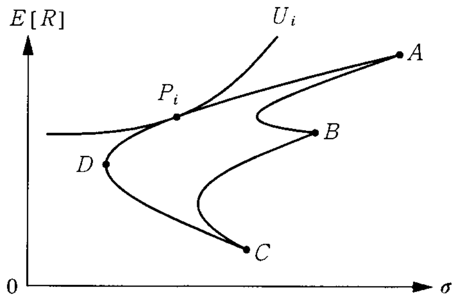
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.5	.6915									

標準正規分布表より、$z\leqq 0.5$となる確率Prob$\{z\leqq 0.5\}$が0.6915だから、求める確率は、

$$\mathrm{Prob}\{z>0.5\}=1-\mathrm{Prob}\{z\leqq 0.5\}=1-0.6915=0.3085=30.85\%$$

Point ⑥ 効率的フロンティア（リスク資産のみの場合）

図１－４－２　効率的フロンティアと最適ポートフォリオ（リスク資産のみ）



投資機会集合：面$ABCD$

最小分散境界：曲線ADC

最小分散ポートフォリオ：点D

効率的フロンティア：曲線AD

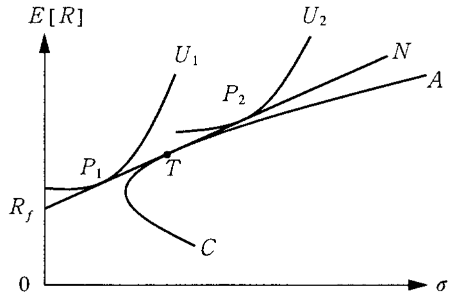
効率的ポートフォリオ：曲線AD上の点

U_i：危険回避者iの無差別曲線

P_i：危険回避者iの最適ポートフォリオ

Point ⑦ 効率的フロンティア（無リスク資産が存在する場合）

図１－４－３　効率的フロンティアと最適ポートフォリオ（無リスク資産あり）



⑴　無リスク資産の導入

・リスク資産と無リスク資産が存在する場合、効率的フロンティアは無リスク資産を示す点R_f（無リスク利子率）からリスク資産の投資機会集合を示す双曲線 $A-T-C$ に引いた接線 R_f-T-N になる。

・点 T はリスク資産のみから構成される唯一の効率的ポートフォリオであり、**接点ポートフォリオ**という。無リスク資産が存在すると、一義的に決り、⑶の**トービンの分離定理**が成立する。

⑵　最適ポートフォリオ

P_1：投資家１の最適ポートフォリオ（貸付ポートフォリオ）

w_f： $w_i = P_1-T$ ： P_1-R_f の投資比率で無リスク資産とリスク資産に投資

P_2：投資家２の最適ポートフォリオ（借入ポートフォリオ）

無リスク利子率で借入れ、すべてリスク資産（接点ポートフォリオ）に投資

⑶　トービンの分離定理

無リスク資産とリスク資産が存在する場合、投資家が最適ポートフォリオを選択する意思決定と、リスク資産のみから構成されるポートフォリオ（T）の決定とは分離可能である。

例題８

《2007（秋）．５．Ⅳ．６》

株式ポートフォリオと安全資産の特性は以下のとおりである。

	期待リターン	標準偏差
株式ポートフォリオ	7.0%	16%
安全資産	1.0%	0%

投資家の効用関数uが

$u = \mu_p - 0.02\sigma_p^2$

μ_p：ポートフォリオの期待収益率

σ_p：ポートフォリオの収益率の標準偏差

と表されるものとする。

この投資家にとっての最適なポートフォリオを株式ポートフォリオと安全資産の２資産から作成するならば、株式ポートフォリオの保有割合はいくらですか。計算において期待収益率と標準偏差は、例えば7.0％は0.07ではなく７と表して行うこと。

解答　59％

解　説

まず、株式ポートフォリオの保有比率をwとして、株式ポートフォリオと安全資産からなるポートフォリオの期待収益率μ_pと収益率の標準偏差σ_pを表す。

期待収益率：$\mu_p = 7w + 1 \times (1 - w) = 6w + 1$

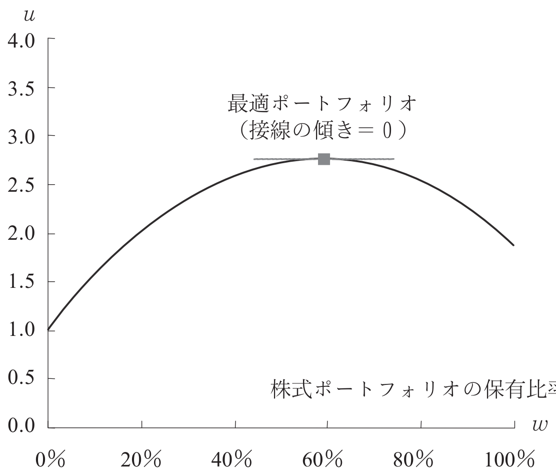
標 準 偏 差：$\sigma_p = 16w$

次に、これを問題で与えられた効用関数に代入してwに関して整理すると、

$$
\begin{aligned}
u &= \mu_p - 0.02\sigma_p^2 \\
&= (6w + 1) - 0.02 \times (16w)^2 \\
&= -5.12w^2 + 6w + 1
\end{aligned}
$$

これから分かるように、効用関数uはwの 2 次関数（上に凸の放物線）として表せるので、この投資家にとって最適ポートフォリオ（効用が最大）となるのは、接線の傾き（すなわち、微分係数）が 0 となる点である。

そこで、効用関数をwで微分して 0 となるwを求めればよい。

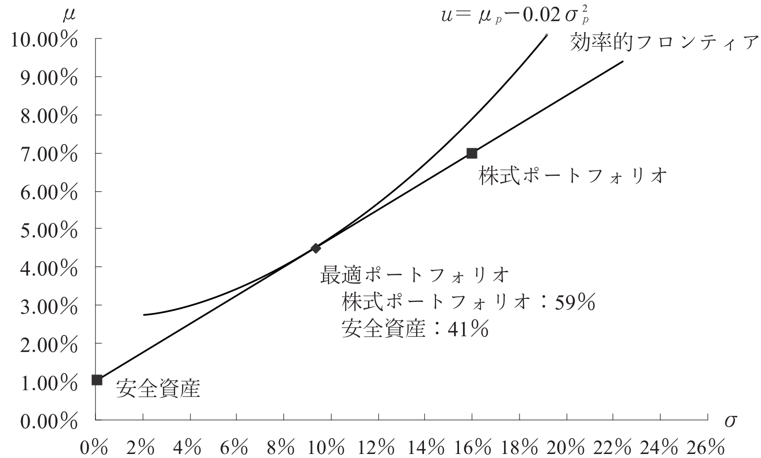


$$\frac{du}{dw} = -10.24w + 6 = 0$$

$$w = \frac{6}{10.24} = 0.5859375$$

$$\approx 59\%$$

効率的フロンティアと最適ポートフォリオ

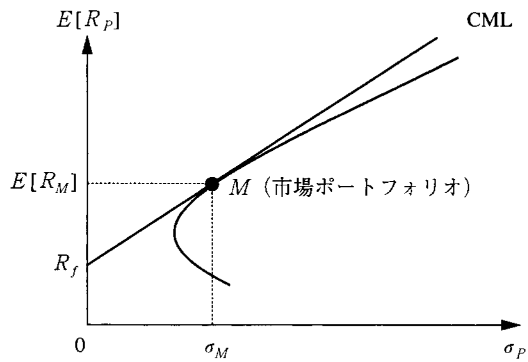


5 CAPM

Point ① 資本市場線（CML）

$$E[R_P] = R_f + \frac{E[R_M]-R_f}{\sigma_M}\sigma_P$$

図１－５－１　資本市場線（CML）



なお、この資本市場線（CML）は安全資産が存在する場合の効率的フロンティアを市場全体に拡張した概念であり、市場ポートフォリオは接点ポートフォリオを市場全体に拡張した概念にほかならない。

Point ② ゼロベータCAPM

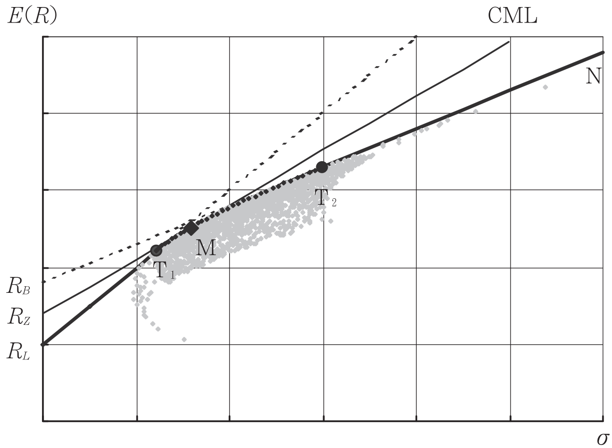
安全資産のあるなしにかかわらず、市場の均衡状態において市場ポートフォリオは効率的ポートフォリオになり、この理論は**ゼロベータＣＡＰＭ**と呼ばれる。市場ポートフォリオMから双曲線に引いた接線がCMLであり、y切片をR_Zとする。また、貸出利子率をR_L、借入利子率をR_B、T_1、T_2をそれぞれR_L、R_Bから双曲線に引いた接線の接点とする。このとき、R_L～T_1～M～T_2～Nが効率的フロンティアで、この場合の市場の均衡状態は次図のようになる。

ここで、リスク回避度の高い投資家は安全資産（利子率R_Lで貸出し）と接点ポートフォリオT_1を組み合わせて運用するので、R_L～T_1上のポートフォリオを選択する。中程度のリスク回避度の投資家は、貸出しも借入れもせず、双曲線

T_1～T_2上のポートフォリオを選択する。そして、リスク回避度の低い投資家は自己資金とR_Bの利子率で借り入れた資金を合わせて接点ポートフォリオT_2に投資するため、T_2～N上のポートフォリオを選択する。したがって、危険資産ポートフォリオに関しては、すべての投資家が双曲線T_1～T_2から選ぶことになる。

２個の効率的ポートフォリオに正の投資比率で投資するポートフォリオは必ず効率的ポートフォリオであり、これを**２基金分離定理**という。双曲線T_1～T_2はT_1、T_2の組合せなので、効率的ポートフォリオであることが保証される。

図１－５－２　ゼロベータＣＡＰＭ



Point 3　証券市場線（SML）

市場ポートフォリオに組み込まれている個別証券（ポートフォリオ）i の均衡期待収益率を考える。

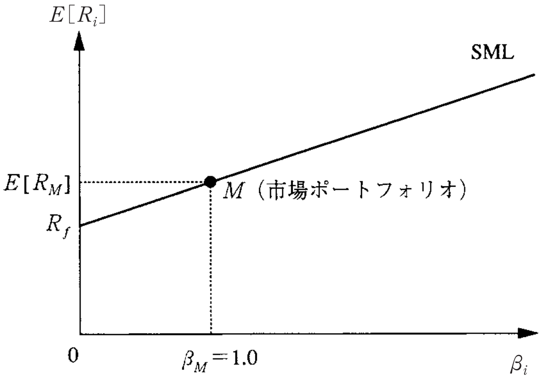
$$E[R_i] = R_f + \underset{\left(\substack{\text{時間の}\\\text{市場価格}}\right)\left(\substack{\text{リスクの}\\\text{市場価格}}\right)}{\left(\frac{E[R_M]-R_f}{\sigma_M}\right)} \times \underset{\left(\substack{\text{リスクの}\\\text{限界的寄与}}\right)}{\left(\frac{Cov(R_i,\ R_M)}{\sigma_M}\right)}$$

ここで、$\beta_i = \dfrac{Cov(R_i,\ R_M)}{\sigma_M^2}$とおくと、

$$\boxed{\textbf{CAPM}:\ E[R_i] = R_f + (E[R_M]-R_f)\beta_i}$$

が成立する。

図１－５－３　証券市場線（SML）



なお、CAPM に関連して次の諸点も重要である。

- ベータの計算

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i,\ R_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{iM}\sigma_i}{\sigma_M}$$

- 市場ポートフォリオのベータは1.0

$$\beta_M = 1.0$$

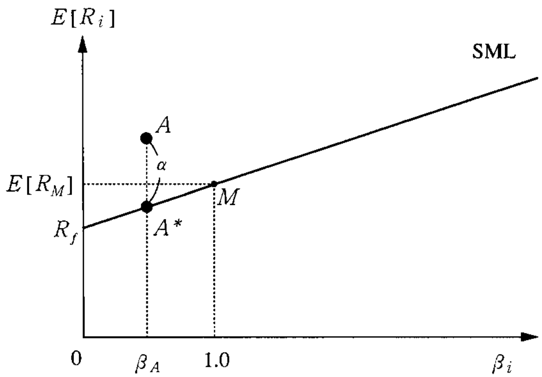
- ポートフォリオのベータ＝個別証券のベータの加重平均

$$\beta_P = \sum w_i \beta_i$$

Point ④　アルファ値

個別証券Aの期待収益率（E(R_A)）と均衡期待収益率（E(R_A^*)）を比較する。

図１－５－４　アルファ値



A ：期待収益率
A^*：均衡期待収益率

アルファ：α ＝ 期待収益率($E[R_i]$)－均衡期待収益率($E[R^*]$)

$\alpha > 0$ ：過小評価 ⇒「買い」

$\alpha < 0$ ：過大評価 ⇒「売り」

Point ⑤ CAPMと回帰分析（「計量分析」関連事項）

CAPMのベータβ_iは、証券iの市場ポートフォリオのリスクプレミアムに対する感応度を示しており、次のような関係がある。

$\beta_i > 1$　のとき　証券iは、市場ポートフォリオよりも相対的にリスクが大きい。

$\beta_i < 1$　のとき　証券iは、市場ポートフォリオよりも相対的にリスクが小さい。

CAPMの実証分析においては、CAPMに含まれる個別証券iと市場ポートフォリオの期待投資収益率のデータを入手することが困難なため、個別銘柄の株式投資収益率と市場ポートフォリオの代理変数とみなしたTOPIXなどの株価指数の投資収益率が用いられる。

さらに、実際の証券市場ではCAPMが前提としている条件が成立していないため、そのことから生ずる歪みをγとしてCAPMのなかに取り込み、次のような線形回帰モデルを考える。

$$R_{i,t} - R_f = \gamma + \beta(R_{M,t} - R_f) + \epsilon_t$$

ここで、

$R_{i,t}$　：個別銘柄iの株式投資収益率

$R_{M,t}$　：株価指数の投資収益率

ϵ_t　：誤差項

このモデルは、次のように変形することができる。

$$R_{i,t} = \alpha + \beta R_{M,t} + \epsilon_t$$

ここで、

$$\alpha = \gamma + R_f(1 - \beta)$$

これは、マーケット・モデルをもとにした線形回帰モデルとなっている。ただし、CAPMに対しては、その前提条件が現実の証券市場で成立しないとか、真の市場ポートフォリオを示すデータがないなど、実際の市場に適用するにはさまざまな問題が指摘されており、投資実務では、通常、直接的に用いられてはいない。

例題９　マーケットに関するデータが以下のように推定されている。TOPIXに関してCAPMが成立していると仮定して各問に解答せよ。

	期待収益率	標準偏差	TOPIXとの相関
株式A	0.16	0.40	0.75
株式B	0.10	0.20	0.90
TOPIX	？？	0.25	1.00

問１　株式Aおよび株式Bの対TOPIXベータを計算せよ。

問２　CAPMによれば株式A、Bはともに均衡価格である。TOPIXの期待収益率および無リスク利子率を計算せよ。

問３　現在、120億円の運用資産がある。株式A、Bに投資しTOPIXと同じ期待収益率をもたらすポートフォリオPを組みたい。それぞれにいくら投資すればよいか。

問４　株式A、Bの相関係数は＋0.6と推定されている。このとき問３のポートフォリオPのリスク（標準偏差）を計算せよ。

問５　資本市場線（CML）を描写し株式A、Bおよび市場ポートフォリオ（TOPIX）と問３のポートフォリオPをプロットせよ。

問６　証券市場線（SML）を描写し株式A、Bおよび市場ポートフォリオ（TOPIX）と問３のポートフォリオPをプロットせよ。

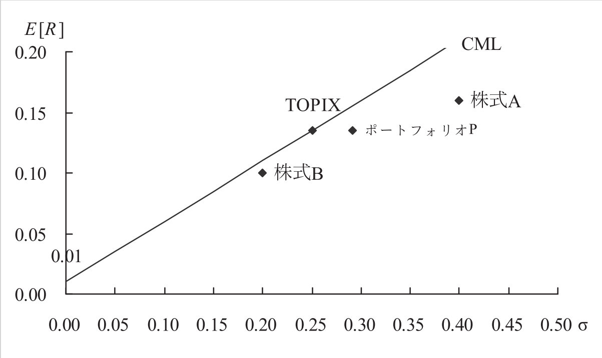
問７　株式Aを空売りし、運用資金の120億円と併せて株式Bを購入することにより、ベータが0.0となるようなポートフォリオQを組みたい。株式Aをどれだけ空売りすればよいか。

問８　問７でつくったポートフォリオQの期待収益率および標準偏差を計算せよ。

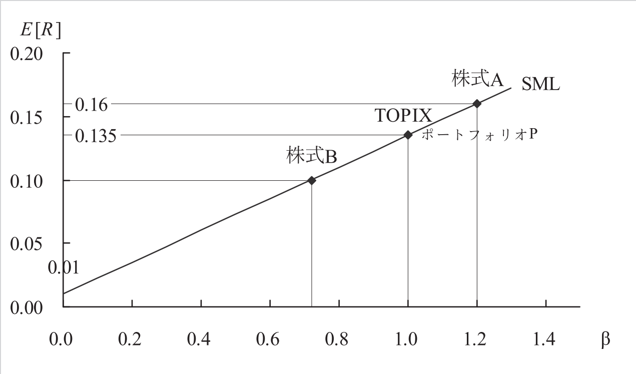
解答

問１　株式Ａ　1.20　　問２　期待収益率　13.5％
　　　株式Ｂ　0.72　　　　　無リスク利子率　1.0％
問３　株式Ａ　70億円　　問４　0.29
　　　株式Ｂ　50億円

問５



問６



問７　180億円空売りする
問８　期待収益率　1.00％
　　　標準偏差　　0.5

解　説

問１　$\beta_i = \dfrac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} = \dfrac{\rho_{iM}\sigma_M\sigma_i}{\sigma_M^2} = \dfrac{\rho_{iM}\sigma_i}{\sigma_M}$

株式Ａ：$\beta_{\mathrm{A}} = \dfrac{0.75 \times 0.40}{0.25} = 1.20$

株式Ｂ：$\beta_{\mathrm{B}} = \dfrac{0.90 \times 0.20}{0.25} = 0.72$

問２　**CAPM**：$E[R_i] = \beta_i(E[R_M] - R_f) + R_f$

株式Aと株式Bについては、期待収益率 $E[R_i]$ とベータ β が判明しているので、市場ポートフォリオ（ここではTOPIX）の期待収益率 $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{R_M}]$ と無リスク利子率 R_f について２本の連立方程式をつくり、解けばよい。

株式Ａ：$0.16 = 1.20 \times (E[R_{TPX}] - R_f) + R_f$

$= 1.20E[R_{TPX}] - 0.20\,R_f$

株式Ｂ：$0.10 = 0.72 \times (E[R_{TPX}] - R_f) + R_f$

$= 0.72E[R_{TPX}] + 0.28\,R_f$

株式Aの式を1.4倍し、２本の式を足す。

$$0.224 = 1.68E[R_{TPX}] - 0.28\,R_f$$

$$+)\quad 0.100 = 0.72E[R_{TPX}] + 0.28\,R_f$$

$$0.324 = 2.40E[R_{TPX}]$$

$$E[R_{TPX}] = 0.135 = 13.5\%$$

$$R_f = 0.01 = 1.0\%$$

問 3　$E[R_P]=w_A E[R_A]+w_B E[R_B]$

$$0.135=0.16\,w_A+0.10(1-w_A)$$

$$=0.06\,w_A+0.10$$

$$w_A=\frac{0.035}{0.06}=\frac{70}{120}\qquad w_B=1-\frac{70}{120}=\frac{50}{120}$$

なお、ポートフォリオ*P*のベータは…

$$\beta_P=1.20\times\frac{70}{120}+0.72\times\frac{50}{120}$$

$$=1.0$$

問 4　$\sigma_P^2=w_A^2\sigma_A^2+w_B^2\sigma_B^2+2w_A w_B\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$

$$=\left(\frac{7}{12}\right)^2\times0.40^2+\left(\frac{5}{12}\right)^2\times0.20^2$$

$$+2\times\frac{7}{12}\times\frac{5}{12}\times0.6\times0.40\times0.20$$

$$=\frac{49\times0.16+25\times0.04+2\times7\times5\times0.6\times0.40\times0.20}{144}$$

$$=\frac{12.2}{144}$$

$$\sigma_P=\sqrt{\frac{12.2}{144}}$$

$$\fallingdotseq 0.29$$

問 5　資本市場線（CML）はタテ軸に期待収益率、ヨコ軸に標準偏差をとった 2 パラメータ平面上で、切片 R_f と市場ポートフォリオを結んだ直線である。

資本市場線（CML）：$E[R_P]=\dfrac{E[R_M]-R_f}{\sigma_M}\sigma_P+R_f$

資本市場線上にある資産は市場ポートフォリオと無リスク資産の組み合わせ、すなわち効率的ポートフォリオである。投資可能なリスク資産で効率的でないものは、すべて資本市場線の下方に位置する。

問６　証券市場線（SML）はタテ軸に期待収益率、ヨコ軸にベータをとった平面上で、切片 R_f と市場ポートフォリオを結んだ直線であり、この式こそがCAPMである。これは市場ポートフォリオに組み込まれてはいるが、それ自体は効率的でないリスク資産の評価式である。

証券市場線（SML）：$E[R_i]=\beta_i(E[R_M]-R_f)+R_f$

証券市場線上にある資産は、CAPMで評価した場合のフェアバリュー（均衡価格）であることを示す。証券市場線の上方に位置する資産は割安、下方に位置する資産は割高と判断される。

問７　株式A、Bの保有比率をw_A, $w_B(w_A+w_B=1)$とし、株式A、Bの保有額をW_A, $W_B(W_A+W_B=120)$とする。

ポートフォリオQのベータ：$\beta_Q=w_A\beta_A+w_B\beta_B$

$$=\frac{W_A}{120}\times1.20+\frac{120-W_A}{120}\times0.72$$

$$0.0=1.20W_A+86.4-0.72W_A$$

$$W_A=-180 \qquad W_B=300$$

問８　$E[R_Q]=w_AE[R_A]+w_BE[R_B]$

$$=\frac{-180}{120}\times0.16+\frac{300}{120}\times0.10$$

$$=-0.24+0.25=+0.01$$

$$\sigma_Q^2=w_A^2\sigma_A^2+w_B^2\sigma_B^2+2w_Aw_B\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$$

$$=\left(\frac{-180}{120}\right)^2\times0.40^2+\left(\frac{300}{120}\right)^2\times0.20^2$$

$$+2\times\frac{-180}{120}\times\frac{300}{120}\times0.6\times0.40\times0.20$$

$$=0.36+0.25+(-0.36)=0.25$$

$$\sigma_Q=\sqrt{0.25}=0.5$$

ベータリスクはゼロであるが、標準偏差は決してゼロではない点に注意。ベータがゼロなので市場リスクは当然ゼロ。このポートフォリオQのリスクはすべて非市場リスクであり、しかもかなり大きい。にもかかわらず、期待リターンは無リスク資産と同じ1.00％にすぎない。危険愛好者であればポートフォリオQを選好し、もしかしたら得られるかもしれない大きなリターンに賭ける。しかし、MPTが想定する危険回避者は期待リターンが同じであれば、ポートフォリオQは決して選ばず、リスクのない無リスク資産を必ず選好する。

例題10

《2011（秋）．6．Ⅰ．5》

安全資産が存在する場合のCAPMに関する次の記述のうち、正しいものはどれですか。

A　投資家が保有する危険資産ポートフォリオの構成は、リスク許容度によってそれぞれ異なる。

B　マーケット・リスクの価格とは、マーケット・ポートフォリオのシャープ比のことである。

C　安全資産を組み合わせることで、投資家の最適ポートフォリオはマーケット・ポートフォリオよりもシャープ比が大きくなる。

D　期待リターンはベータに比例するが、リスクプレミアムはベータに比例しない。

解答　B

解　説

A　正しくない。安全資産が存在し保有される限り、危険資産の最適組み合わせ（危険資産ポートフォリオの構成）は、リスク・リターンに関する投資家の選好と独立である（トービンの分離定理）。なお、安全資産が存在する場合のCAPMにおいて、投資家が保有する危険資産ポートフォリオは「マーケット・ポートフォリオ」であり、危険資産のみで構成される唯一の効率的ポートフォリオである。これは、市場の均衡状態において市場に存在するすべての危険資産を含み、その時価総額加重平均で構成される。

B　正しい。マーケット・リスクの価格は資本市場線（CML；Capital Market Line）の傾きであり、これはマーケット・ポートフォリオのシャープ比（シャープ・レシオ）である。

$$E[R_P]=\underbrace{\frac{E[R_M]-R_f}{\sigma_M}}_{\text{マーケット・リスクの価格}}\cdot\sigma_P+R_f$$

C　正しくない。危険資産ポートフォリオと安全資産の組み合わせは、資本市場線（CML）上のポートフォリオなので、シャープ比（シャープ・レシオ）は一定である。

D　正しくない。CAPMは以下の通り。

$$\overbrace{E[R_i]}^{\text{資産}i\text{の期待リターン}}=\beta_i(E[R_M]-R_f)+R_f$$

$$\underbrace{E[R_i]-R_f}_{\text{資産}i\text{のリスクプレミアム}}=\beta_i(E[R_M]-R_f)$$

ただし、$E[R_i]$：資産iの期待収益率、$E[R_M]$：マーケット・ポートフォリオの期待収益率、β_i：資産iのベータ、R_f：安全資産収益率（リスクフリー・レート）。

したがって、資産iの期待リターンはベータに比例せず、リスクプレミアムがベータに比例する。

例題11

《2016（春）. 6 . Ⅰ. 3》

　ＣＡＰＭが想定する市場の均衡状態を前提とする次の記述のうち、正しくないものはどれですか。

A　資本市場線の傾きは、市場ポートフォリオのシャープ・レシオに等しい。

B　資本市場線の下側に位置する資産が存在する。

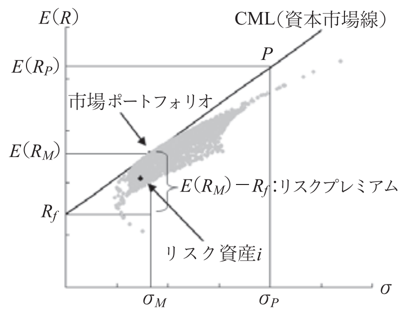
C　証券市場線の傾きは、市場ポートフォリオのリスクプレミアムに等しい。

D　証券市場線の下側に位置する資産が存在する。

解答　D

解　説

「市場の均衡状態」というのがポイント。期待収益率が証券市場線（ＳＭＬ）上になければＣＡＰＭの均衡状態ではない。



Ａ　正しい。ＣＡＰＭで資本市場線（ＣＭＬ）は市場にリスク資産と無リスク資産が存在する場合の「効率的ポートフォリオ」を描いたものであり、効率的ポートフォリオは市場ポートフォリオと無リスク資産の組合せである。資本市場線上の効率的ポートフォリオPの期待収益率は、

$$E[R_P]=\underbrace{\frac{E[R_M]-R_f}{\sigma_M}}_{\text{傾き}}\times\sigma_P+R_f$$

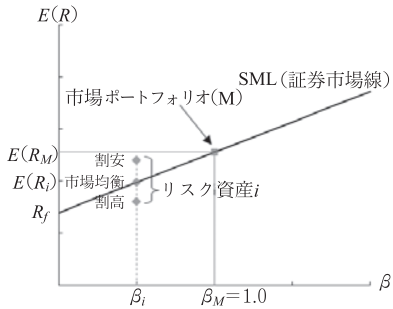
であり、資本市場線の傾きは市場ポートフォリオのシャープ・レシオに等しい。

Ｂ　正しい。ＣＡＰＭでは効率的ポートフォリオは資本市場線上にあり、それ以外の大半の資産は資本市場線の下側に存在する。

Ｃ　正しい。証券市場線は資産iのベータ（リスク）に対応した均衡収益率を描いたものである。資産iの均衡期待収益率は、

$$E[R_i] = \underbrace{(E[R_M]-R_f)}_{\text{傾き}} \times \beta_i + R_f$$

であり、証券市場線の傾きは市場ポートフォリオのリスクプレミアムである。



Ｄ　正しくない。期待収益率が証券市場線上になければ均衡状態ではなく、証券市場線よりも上側に位置すれば割安、証券市場線よりも下側に位置すれば割高である。「市場の均衡状態を前提とする」わけだから、証券市場線よりも下側に位置する資産は存在しない。

6　マーケット・モデル

Point ①　マーケット・モデル

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i$$

ここで、

R_i　：個別証券iの投資収益率

α_i　：個別証券iの固有の値（定数）

β_i　：市場から受ける個別証券iへの影響の大きさ（定数）

R_M　：市場全体を表すポートフォリオ（M）の投資収益率

e_i　：R_Mの変動によって説明できない個別証券iに固有の動き

（仮定）

$e_i \sim N(0,\ \sigma_{ei}^2)$　：残差項は期待値０、分散σ_{ei}^2（一定）の正規分布に従う。

$Cov(e_i,\ R_M) = 0$　：個別証券の残差項は市場全体の収益率と無相関である。

$Cov(e_i,\ e_j) = 0\quad (i \neq j)$　：異なる個別証券の残差項は互いに無相関である。

Point ②　個別証券iのリスクとリターン

⑴　**期待投資収益率**

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_M)$$

⑵　**個別証券iの分散**

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{ei}^2$$

σ_i^2　：総リスク

$\beta_i^2 \sigma_M^2$　：市場リスク（システマティック・リスク、市場に連動するリスク）

σ_{ei}^2　：非市場リスク（アンシステマティック・リスク、証券iに固有のリスク）

$$\beta_i = \frac{Cov(R_M,\ R_i)}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{iM}\sigma_i}{\sigma_M}$$

Point ③ ポートフォリオPのリスクとリターン

(1) 期待投資収益率

$$E(R_P)=\sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n} w_i \{\alpha_i+\beta_i E(R_M)\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i+E(R_M)\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i$$

(2) ポートフォリオPの分散

$$\sigma_P^2=\sum_{i=1}^{n} w_i^2\left(\beta_i^2\sigma_M^2+\sigma_{ei}^2\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} w_i w_j \beta_i \beta_j \sigma_M^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n} w_i^2\beta_i^2\sigma_M^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} w_i w_j \beta_i \beta_j \sigma_M^2+\sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_{ei}^2$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n} w_i^2\beta_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} w_i w_j \beta_i \beta_j\right)\sigma_M^2+\sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_{ei}^2$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \beta_i \beta_j\right)\sigma_M^2+\sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_{ei}^2$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\ \beta_i\right)^2\sigma_M^2+\sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_{ei}^2$$

(3) 分散投資の効果

n個の証券に均等割合で投資することを考えると、各個別証券の投資比率w_iは１／nとなる。このとき、ポートフォリオの分散は、次のようになる。

$$\sigma_P^2=\Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i}_{=\beta_P}\Bigg)^2\sigma_M^2+\sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_{ei}^2$$

$$=\beta_P^2\sigma_M^2+\frac{1}{n}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2}_{=\bar{\sigma}_e^2}$$

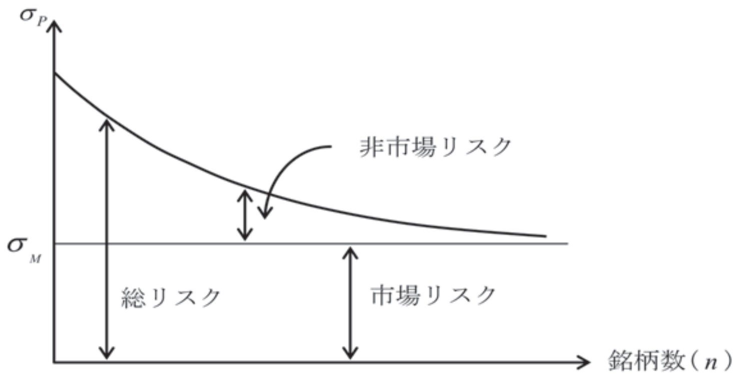
$$=\beta_P^2\sigma_M^2+\frac{1}{n}\bar{\sigma}_e^2$$

ここで、$\beta_P^2\sigma_M^2$は市場リスクであり、$\bar{\sigma}_e^2$／nは非市場リスクである。いま、銘柄数nを限りなく増やしていくと、$\bar{\sigma}_e^2$／nはゼロに近づいていく。このことは、個別証券の総リスクのなかで、非市場リスクは分散投資によって消去

可能なリスクであるのに対し、市場リスクは分散投資によっても消去不可能なリスクとなることを意味している。

ポートフォリオの総リスクは、銘柄数を増やすことにより、σ_M^2 まで限りなく逓減させることができる。これが**分散投資の効果**である。

図1－6－1　分散投資の効果



Point 4　回帰分析とマーケット・モデル

(1)　線型回帰モデル

観測値を用いて、ある変数を他の変数の関数として捉えることを**回帰分析**といい、それらの関係を表したモデルを**線形回帰モデル**という。マーケット・モデルは、ある証券iの投資収益率 R_i が、市場全体の投資収益率 R_M と**誤差項** e_i とによって生成される過程を示しており、線形回帰モデルとして捉えることができる。このとき、市場全体の投資収益率 R_M を**説明変数**（または、**独立変数**）と呼び、証券iの投資収益率 R_i を**被説明変数**（または、**従属変数**）と呼ぶ。回帰分析では、最小２乗法を使って、α_i と β_i の値を推定する。

⑵　決定係数R^2

$$R^2 = 1-\frac{\sigma_{ei}^2}{\sigma_i^2}$$

$$= \left\{\frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma_i\,\sigma_M}\right\}^2 = \rho_{iM}^2$$

決定係数R^2は、線形回帰モデルとみなしたマーケット・モデルの**あてはまり具合**を示す尺度として使われる。決定係数R^2は、

$$0 \leqq R^2 \leqq 1$$

の間の値をとり、１に近いほどマーケット・モデルのあてはまりがよく、０に近いほどあてはまりが悪いことを示す。さらに決定係数は、**個別証券の総リスクのうち市場リスクの占める割合**を示している。

⑶　*t* 検定

被説明変数を確率変数とみなしたとき、そこで考えている線形回帰モデルにおいて、説明変数がつねに効果をもつ保証はない。そのため計量分析では、説明変数がそのモデルで意味のある変数であるかどうかを確かめることが重要となる。そこで、「モデルに含まれている説明変数が、被説明変数に対してまったく影響を与えない」ということを帰無仮説とした統計的検定を行う必要がある。この統計的検定を***t* 検定**という。

t検定では、「ある説明変数に対する回帰係数の推定値が真の値である」ということ、例えば真の値が０の場合、

$$H_0：\beta = 0$$

を帰無仮説として、説明変数の係数βがゼロかどうかを直接検討する。このように回帰係数の値が０と異なるかどうかを判断するためには、回帰係数をその推定誤差で割った相対的な大きさを求め、その相対的な大きさを統計的に検定すればよい。この相対的な大きさを表す検定統計量として、***t* 値**が用いられる。

推定された回帰係数$\hat{\beta}$のt値は次のようになる（注：ここで、推定された回帰係数$\hat{\beta}$は、平均０、標準偏差σ_β（未知）の正規分布に従う母集団から得られたと仮定する）。

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{推定値－「真の値」}{標準誤差} = \frac{\hat{\beta}-0}{s_{\hat{\beta}}}$$

ここで、

$\hat{\beta}$　：推定された回帰係数

$s_{\hat{\beta}}$　：$\hat{\beta}$の標準誤差

このt値は、自由度が「（データ数h）マイナス（説明変数の個数）マイナス１」（ここでは、$h-1-1$となる）のt分布に従う。対立仮説が

$$H_1：\beta \neq 0$$

という両側検定の場合、$|t_{\hat{\beta}}| > k$のときに帰無仮説を棄却するというルールを適用する。帰無仮説が棄却されたとき、その説明変数は対象としているモデルのなかで意味をもつことが統計的基準で判断されたこととなる。ここで、臨界値kが問題となるが、有意水準が５％の両側検定のとき、kは２近辺の値をとるので（例えば、自由度が無限大のとき1.960となる）、実務界では$k=2$と考えることが多い（P.108 t分布表参照）。

例題12

以下の問１から問４に答えよ。

Ｉ社株について、マーケット・モデルに基づいて分析を行うこととした。マーケット・モデルは次のように表される。

$$R_I = \alpha + \beta R_M + e$$

ここで、

R_I　：Ｉ社株の月次株式投資収益率

α、β　：パラメーター

R_M　：市場全体を表すポートフォリオの投資収益率

e　：攪乱項

ただし、市場全体を表すポートフォリオの投資収益率をTOPIXの投資収益率で代表させることにする。（表）は、このマーケット・モデルの推定結果を示している。

（表）マーケット・モデルの推定結果（×1年１月～×5年12月）

	α	β
推定値	0.62	1.37
t値	1.14	14.87
サンプル数	60	
決定係数	0.79	
残差の標準偏差	4.18	

問１　（表）の推定結果に従えば、TOPIXが２％変動したとき、Ｉ社の株式投資収益率は次のうちどれだけ変動するか。

Ａ　1.37％

Ｂ　2.12％

Ｃ　2.74％

Ｄ　3.36％

問２　Ｉ社株の総リスクのうち、市場リスクが占める割合は次のうちどれか。

Ａ　4.18％

Ｂ　　33％

Ｃ　　62％

Ｄ　　79％

問３　表のマーケット・モデルの推定結果に示されている統計値の解釈について、次の記述のうち正しいものはどれか。必要に応じて章末Ｐ.93のt分布表を利用せよ。

Ａ　有意水準５％のもとで、α、β ともに統計的に有意である。

Ｂ　有意水準５％のもとで、α、β ともに統計的に有意でない。

Ｃ　有意水準５％のもとで、α は統計的に有意であるが、β は統計的に有意でない。

Ｄ　有意水準５％のもとで、α は統計的に有意でないが、β は統計的に有意である。

問４　ここで推定されたマーケット・モデルについて、次の記述のうち正しいも

のはどれか。

A　TOPIXの回帰係数（β）は、I社株のリスクのうちI社に固有の要因に基づくリスクの尺度となる。

B　この分析結果より、I社株はTOPIX（市場全体の動き）よりも相対的にリスクが大きいことがわかる。

C　定数項の回帰係数（α）の推定結果より、I社株はほぼ証券市場線上にあることがわかる。

D　定数項の回帰係数（α）は、市場全体に共通したリターンの尺度となる。

解答　問1　C　　問2　D　　問3　D　　問4　B

解　説

問1　TOPIXの回帰係数（β）の解釈

　TOPIXの回帰係数（β）は、個別銘柄の株式投資収益率の動きとTOPIXの変動の関係を示す尺度となっている。例えば、TOPIXが1％変動したとき、個別銘柄の株式投資収益率はβ％変動することとなる。（表）の推定結果に従えば、I社株のβの値は1.37となっており、いまTOPIXが2％変動したとすると、I社の株式投資収益率は2.74％変動することとなる。

問2　決定係数

　決定係数は、回帰モデルのあてはまりのよさを表す尺度（統計量）であり、0から1までの範囲の値をとる。ここで推定したマーケット・モデルに対して、決定係数が1に近いことは、個別銘柄の株式投資収益率の動きのうち、TOPIXの動きで説明される割合が大きいことを意味している。さらに、マーケット・モデルにおける決定係数は、個別銘柄の株式の総リスクのうち、市場リスクの占める割合も示している。（表）の推定結果に従えば、決定係数は0.79となっており、I社株の総リスクの

うち、市場リスクが占める割合は79％であることがわかる。

問３　t 検定

t 検定は、独立変数の係数がゼロとなることを帰無仮説とした統計的検定である。データはサンプル数60、回帰係数１つなので自由度は60－1－1＝58。t 分布表には自由度58の欄はないが、60とほぼ同じ水準と考えられる。有意水準５％のもとであるから、自由度60とa＝0.025(2a＝0.05)が交わるところが t 値の臨界値である。（表）の回帰分析の結果から、定数項（α）とTOPIXの回帰係数（β）の t 値がそれぞれ2.00以上となっているかどうかをみてみると、β だけが帰無仮説を棄却していることがわかる。このことより、有意水準５％のもとで、α は統計的に有意ではないが、β は統計的に有意であることがわかる。

自由度 ＼ a (2a)	.250 (.500)	.200 (.400)	.150 (.300)	.100 (.200)	.050 (.100)	.025 (.050)	.010 (.020)	.005 (.010)	.0005 (.0010)
⋮									
40	.681	.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
50	.679	.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.496
60	.679	.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
70	.678	.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.435
⋮									

問４　マーケット・モデルの性質

Ａ，Ｂ　リスク尺度としての β

個別銘柄の株式のリスクは、その銘柄固有の要因に基づいた非市場リスクと、市場全体に共通する要因に基づいた市場リスクに分解される。β は、このうち、市場リスクの尺度となる。いま、ある個別銘柄株の β の値が1.3であるとすると、市場全体の投資収益率の変動率が１％のとき、その個別銘柄株の投資収益率は1.3％変動することとなり、市場全体の値動きよりも３割ほど大きく変動することとなる。このため、次のような関係がいえる。

β ＞１のとき　その銘柄株は、市場ポートフォリオ（市場全体）よりも相対的にリスクが大きい。

$\beta < 1$のとき　その銘柄株は、市場ポートフォリオ（市場全体）よりも相対的にリスクが小さい。

C，D　定数項α

　マーケット・モデルにおけるαは、個別銘柄の株式に固有の値（定数）であり、アンシステマティック・リターン（個別銘柄株に固有のリターン）の一部となる。ここで推定されたマーケット・モデルのβが、若干の仮定をおいたCAPMのβの推定量となっているのに対して、αは、CAPMにおけるαとは異なったものとなっている。このため、推定されたαの値がゼロに非常に近くても、または、t検定において帰無仮説が受容されたとしても、その個別銘柄株が証券市場線上にあることを意味しない。

例題13

《2011（秋）. 6．Ⅰ．8》

　市場リスクと非市場リスクに関する次の記述のうち、正しくないものはどれですか。

A　非市場リスクは、銘柄分散によって削減することができる。

B　個別証券のトータルリスクは、市場リスクと非市場リスクに分解することができる。

C　金利変動リスクは、市場リスクと考えることができる。

D　均衡において、非市場リスクが大きいほど、リスクプレミアムは大きくなる。

解答　D

解　説

Ａ　正しい。ポートフォリオの組み入れ資産の数を増やすこと（銘柄分散）によって、非市場リスクは削減ないし消去することができる。

Ｂ　正しい。マーケット・モデルによるリスクの分解は以下の通り。

$$\underbrace{\sigma_i^2}_{\text{トータルリスク}} = \underbrace{\beta_i^2\sigma_M^2}_{\text{市場リスク}} + \underbrace{\sigma_{\varepsilon i}^2}_{\text{非市場リスク}}$$

ただし、σ_i：個別証券iのリターンの標準偏差、β_i：個別証券iのベータ、σ_M：マーケット・ポートフォリオのリターンの標準偏差、$\sigma_{\varepsilon i}$：個別証券iの残差の標準偏差。

Ｃ　正しい。

Ｄ　正しくない。均衡においてはCAPMが成立し、市場リスク（β）が大きいほどリスクプレミアムは大きくなる。

$$\underbrace{E[R_i]-R_f}_{\text{資産}i\text{のリスクプレミアム}} = \beta_i(E[R_M]-R_f)$$

ただし、$E[R_i]$：資産iの期待収益率、$E[R_M]$：マーケット・ポートフォリオの期待収益率、β_i：資産iのベータ、R_f：安全資産収益率（リスクフリー・レート）。